Anello: $(A, \top, \perp)$

$(A, \top)$ gruppo abeliano:

1) propr. associativa
2) $\exists$ el. neutro
3) $\forall a \in A\ \exists a'$ inverso opposto di $a$
4) propr. commutativa

valgono le propr. distributive di $\perp$ risp. a $\top$:

$\forall a, b, c \in A$

$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$

$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$

vale la propr. associativa di $\perp$

---

Anello commutativo se $\perp$ gode della propr. commutativa,

---

Anello unitario se c'è un el. neutro di $\perp$

---

Campo: anello comm. unitario in cui ogni elemento diverso dall'el. neutro di $\top$ ammette inverso risp. a $\perp$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ anello comm. unitario

$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ (polinomi di $\forall$ grado in $x$ a coeff. reali)

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ campi
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$

---

In un anello $(A, +, \cdot)$ possono esserci divisori dello zero: elementi $a, b \in A - \{0\}$ tali che sia $a \cdot b = 0$

---

n-pla ordinata di elementi di un insieme $A$.

una applicazione da $\mathbb{N}_n$ ad $A$

$= \{1, 2, \dots, n\}$

$A^n = \{$ n-ple ordinate di el. di $A\}$

---

Quando parlo della 4-pla $(1, 5, \sqrt{2}, 1) \in \mathbb{R}^4$ intendo l'applicazione

$$\begin{aligned} 1 &\longmapsto 1 \\ 2 &\longmapsto 5 \\ 3 &\longmapsto \sqrt{2} \\ 4 &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

---

Matrice di tipo $m \times n$ ad elementi in $A$:

applicazione da $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ ad $A$

Per esempio

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4 \\ \sqrt{5} & 0 & -2 \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

è intesa come l'applicazione da $\mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_3$ ad $\mathbb{R}$

$(1,1) \mapsto 1$ $\quad b^1_1 =$
$(1,2) \mapsto 2/3$ $\quad b^1_2 =$
$(1,3) \mapsto 4$ $\quad b^1_3 =$

$(2,1) \mapsto \sqrt{5}$ $\quad b^2_1 =$
$(2,2) \mapsto 0$ $\quad b^2_2 =$
$(2,3) \mapsto -2$ $\quad b^2_3 =$

---

Date matrici $A = (a^i_j)$, $B = (b^i_j) \in M_{m\times n}(K)$

definisco $C = A + B = (c^i_j) \in M_{m\times n}(K)$

$$c^i_j = a^i_j + b^i_j$$

---

Data $\alpha \in K$ definisco

$D = \alpha \cdot A = (d^i_j) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$d^i_j = \alpha \, a^i_j$

---

Date $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{K})$

$= (a^i_j)$ $\quad$ $= (b^h_k)$

si può definire

$C = A \cdot B = (c^r_s) \in M_{m \times p}(\mathbb{K})$

dove $c^r_s = \sum_{t=1}^{n} a^r_t \cdot b^t_s$

---

Per ogni naturale $n > 0$ esiste la matrice

$I_n = (\delta^i_j) \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$

dove $\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

PROP. Data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

---

Matrice quadrata:

matrice $\in M_{n \times n}(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$

---

$(M_n, +, \cdot)$ è un anello

prodott. fra matrici

unitario, non commutativo (per $n>1$), con divisori dello zero (per $n>1$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DOMANDA: quali matrici quadrate sono invertibili?

Permutazione di un insieme $A$: una qualsiasi applicazione biiettiva da $A$ ad $A$.

---

Data una permutazione

$$\sigma: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{array}$$

chiamo coppia in inversione una coppia $i, j$ con $i<j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$

$\mu(\sigma) =$ n. di coppie in inversione di $\sigma$

$$\text{sign}(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)}$$

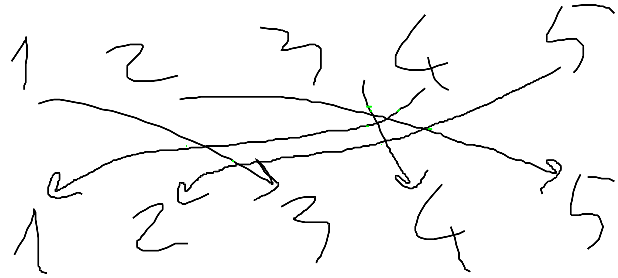
---

Esempio

$$\sigma: \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{array}$$

$\mu(\sigma) = 7$

$\text{sign}(\sigma) = (-1)^7 = -1$



Data $A \in M_n(\mathbb{K})$
$= (a^i_j)$

definisco il determinante di $A$: $\det A = |A| =$

$$= \sum_{\sigma \in \{\text{permut. di } \mathbb{N}_n\}} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdots a^n_{\sigma(n)}$$

TEOR - Data $A \in M_n(\mathbb{K})$
($(\mathbb{K},+,\cdot)$ campo) $\exists\, B \in M_n(\mathbb{K})$
tale che $A \cdot B = I_n = B \cdot A$
$\iff \det A \neq 0$