$(\mathbb{Z}, -)$ $\quad 7 - 0 = 7$

$0 - 7 = -7 \neq 7$

$(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$

$(v_1, \dots, v_n)$ linearmente dipendente

se $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \bar{0}_V$$

PROP — I vettori $v_1, \dots, v_n$, fra loro distinti, sono linear= mente dipendenti

$\Updownarrow$

$\exists$ uno di loro che è combina= zione lineare degli altri.

Dato $X \subset V$, $L(X)$, chiusura
$\langle X \rangle$
$span(X)$
lineare di X, è l'insieme, che risulta sottospazio vettoriale, formato da tutte le combinazioni lineari di vettori di X.

X è un sistema di generatori di V se $V = L(X)$

Base di V: un sistema di generatori linearmente indipendente.

PROP - Data una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ogni vettore $v \in V$ si esprime come combinazione lineare di $e_1, \dots, e_n$ in modo unico:

$$v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$$

TEOR - Se in V $\exists$ una base formata da n elementi, allora TUTTE le basi di V sono formate da n elementi.

DEF - Dimensione di V, $\dim V$, è il numero di elementi di una qualunque base di V.

Si può definire l'applicazione $\Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ che associa a $v \in V$ la n-pla $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che

componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$\Phi_{\mathcal{B}}$ risulta biiettiva

Data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ chiamo rango di A $r(A)$ la dimensione del sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A.

Cioè $r(A)$ è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A

TEOR – $r(A) = r({}^tA)$

Dunque $r(A)$ è anche il massimo numero di righe linearmente indipendenti

---

$A = (a_j^i) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ si dice ridotta se:

1) le eventuali righe nulle sono le ultime

2) chiamando pivot di una riga il suo elemento $\neq 0$ con minimo indice di colonna, passando dalla riga i alla $i+1$ il pivot della riga $i+1$ ha indice di colonna maggiore del

pivot della riga i.

PROP - Data una matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ qualsiasi esiste almeno una sequenza finita di trasformazioni di riga T1 e T2 che trasformano A in una matrice ridotta

PROP - Se B è ottenuta da A mediante una trasformazione di riga T1 o T2, allora $r(B) = r(A)$

PROP - Se B è ridotta, allora $r(B)$ è uguale al numero delle sue righe non nulle.