$$u = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\\-3\end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \quad \boxed{2 \leq r \leq 3} \quad r = 2$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 0$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix} = 0 \quad |O_3| = \begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 3\end{vmatrix} = 0$$

$$U: \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\\u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & -2\\ 0 & 0\\ -3 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

impongo

$$r\begin{pmatrix}x & 1 & 0\\ y & 0 & 1\\ z & 2 & -2\\ t & 0 & 0\\ u & -3 & 3\end{pmatrix} = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 0 & 1\\ z & 2 & -2\end{vmatrix} = 0\\ \begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 0 & 1\\ t & 0 & 0\end{vmatrix} = 0\\ \begin{vmatrix}x & 1 & 0\\ y & 0 & 1\\ u & -3 & 3\end{vmatrix} = 0\end{array}\right.$$

$$U: \begin{cases} -2x + 2y + z = 0\\ t = 0\\ 3x - 3y + u = 0\end{cases} \quad \begin{pmatrix}-2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

V sp. vett.

Spazio affine associato a V:

$$\mathcal{A}=(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{vettori liberi}}}{V}, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{punti}}}{V}, \tau) \qquad \tau : V\times V \longrightarrow V$$

$$(u,v) \longmapsto v-u = \overrightarrow{uv}$$

I $\mathcal{A}$ siano dati i punti $P_0, P_1, \dots, P_h$, dica che sono **affinemente dipendenti** se i vettori liberi $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ sono linearmente dipendenti

---

Sottospazio affine: ogni sottoinsieme di $\mathcal{A}$ che sia un traslato $\mathcal{H}$ di un sottospazio vettoriale U. U verrà chiamato **giacitura** di $\mathcal{H}$

e la dimensione di $\mathcal{H}$ è definita dalla dimensione di U. Scriviamo $U = \overrightarrow{\mathcal{H}}$

PROP - Dato un sistema lineare possibile S il suo spazio di soluzioni è il traslato, mediante una qualsiasi soluzione fissata $\bar{x}$, dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato S_o

$$\mathrm{Sol}\,S = \bar{x} + \mathrm{Sol}\,S_o$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ \mathbb{K}^n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (V, \langle , \rangle) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle) \end{tikzcd}$$

base ordinata

base ortonormale

naturale

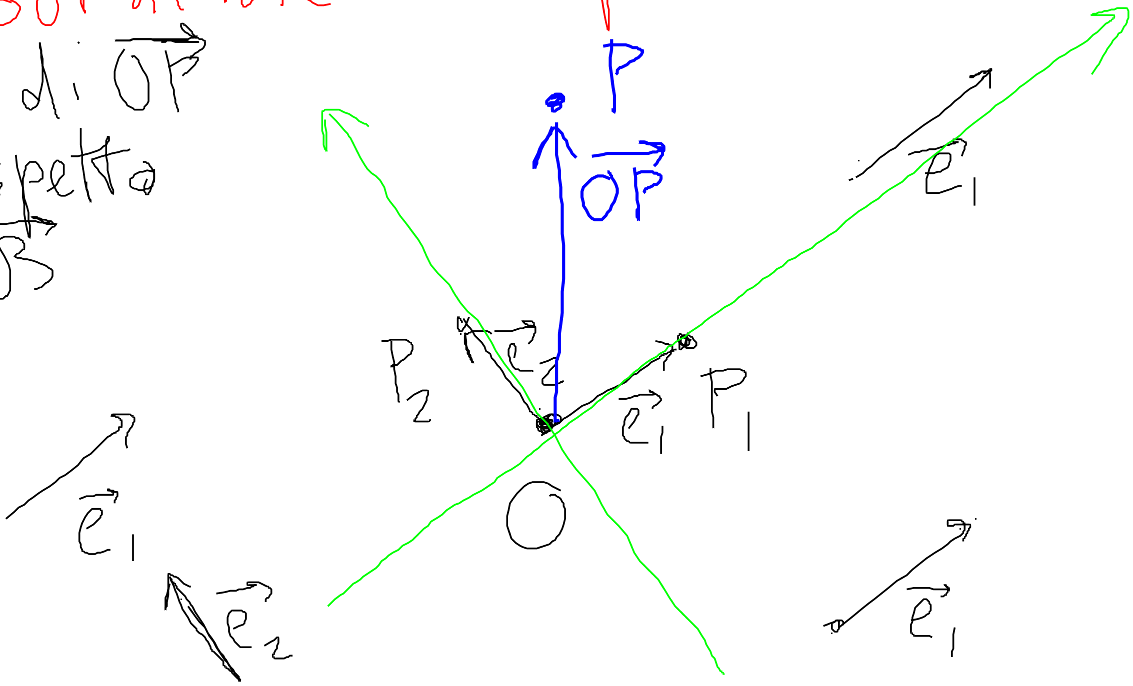
$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} = (V, V, \tau) \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{R}}"] \\ (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \tau) \end{tikzcd}$$

riferimento affine

sp. affine

Riferimento affine di uno sp. affine $\mathcal{A} = (V, V, \tau)$: ogni coppia $(O, \vec{\mathcal{B}})$ dove O è un punto e $\vec{\mathcal{B}}$ è una base dello spazio dei vettori liberi.

Coordinate di un punto P: componenti di $\vec{OP}$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$



PROP - Se $P \equiv_{\mathcal{R}} (a_1, \ldots, a_n)$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} (b_1, \ldots, b_n)$, allora

$$\vec{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n)$$

Dato un sottospazio affine $\mathcal{H}$, esso può essere rappresentato come spazio di soluzioni di un sistema lineare possibile S. Allora la sua giacitura $\vec{\mathcal{H}}$ è rappresentata dal sistema omogeneo associato S_0

Esempio: in $\mathcal{A}^3$, rispetto a un rif. aff. R,

$$\mathcal{H}: \begin{cases} x+y-2z=1 \\ x-y+z=3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} =0 \\ =0 \end{matrix}$$

$$\vec{\mathcal{H}}$$

Questa è una rappresentazione cartesiana di $\mathcal{H}$.

Posso avere una rappresentazione parametrica di un sottospazio affine come traslato della sua giacitura in forma parametrica

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y + 2z \\ y = \dfrac{-2 + 3\alpha}{2} \\ z = \alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 1 - \frac{3}{2}\alpha + 2\alpha = 2 + \frac{\alpha}{2} \\ y = -1 + \frac{3}{2}\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$H: \underset{\substack{\vec{x} \\ 3\times1}}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}} \underset{1\times1}{(\alpha)} + \underset{3\times1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

PROBLEMA

Dati in un $\mathcal{A}^5$, risp. a un rif. aff.,

i punti $A \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D \equiv \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

si scrivano rappresentazioni cart. e parametrica minime del sottosp. affine $\mathcal{A}'$ di minima dimensione contenente A, B, C, D.

($\mathcal{A}'$ generato da A, B, C, D, o passante per A, B, C, D)

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ ~~C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}~~,\ D = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ ~~\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}~~,\ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad 2 \leq r \leq 3$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad r = 2$$

π

$\vec{x}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AX} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \\ t-1 \\ u-0 \end{pmatrix}$$

Impongo

$$r\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ (y-1) & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \\ (t-1) & 0 & 1 \\ u & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ (y-1) & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} (y-1) & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \\ (t-1) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} (y-1) & -1 & 0 \\ z & 0 & 1 \\ u & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} -x-(y-1)-z=0 \\ z-(t-1)=0 \\ -y+1-u=0 \end{array}\right.$$

$$\pi : \left\{\begin{array}{l} -x-y-z=-1 \\ z-t=1 \\ -y-u=-1 \end{array}\right.$$

$$\overrightarrow{\pi} : \quad \begin{array}{l} =0 \\ =0 \\ =0 \end{array}$$