$$B = E^{-1} \cdot A \cdot E$$

$$|B| = |E^{-1}| \cdot |A| \cdot |E| =$$

$$= |A| |E^{-1}| \cdot |E| =$$

$$= |A| \, |E^{-1} \cdot E| = |A|$$

$$B = {}^tE \cdot A \cdot E$$

$$|B| = |{}^tE| \cdot |A| \cdot |E| =$$

$$= |A| \cdot (|E|)^2$$

Ogni matrice A simmetrica è simile e congruente a una matrice diagonale

D che presenta sulla diagonale principale gli autovalori di A ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità (algebrica = geometrica).

A congruente a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Siamo in $\mathbb{C}$; siano $d_1, \dots, d_q \neq 0$, $d_{q+1}, \dots, d_n = 0$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Costruiamo la matrice

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & & & & \\ & \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & 0 & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_r}} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Allora D è congruente

a $\Lambda = {}^tF \cdot D \cdot F =$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{{}^tF} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \lambda_r & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{r} & 0 \\ 0 & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

rango di A

Forma canonica per congruenza di A

Prop. Ogni $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica è congruente alla sua forma can. per congr.

Cor. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche;

A congruente a B $\iff r(A) = r(B)$

Siamo in $\mathbb{R}$

A è congruente a

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & d_h & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \mu_k & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

>0

<0

Costruisco

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{d_1}} & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\frac{1}{d_h}} & & & & & & \\ & & & \sqrt{\frac{1}{-\mu_1}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{\frac{1}{-\mu_k}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

D è congruente a $\Lambda = {}^tF \cdot D \cdot F =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_h}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_k}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & d_h & & & & & & \\ & & & \mu_1 & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \mu_k & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{d_1}} & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{d_h}} & & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_1}} & & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\mu_k}} & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{h} & & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{k} & \\ & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Forma canonica per congruenza in $\mathbb{R}$

PROP – A è congruente alla sua forma can. per congr.

Segnatura di una matrice simmetrica reale A:
$\sigma(A) = (\sigma_+, \sigma_-)$, dove
σ_+ è la somma delle molteplicità (alg. = geom.) degli autovalori positivi di A
σ_- negativi

COR - $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche
A congruente a $B \Leftrightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

TEOR (Harriot-Cartesio) (forma debole, addolcita)
Sia $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ un polinomio a coefficienti

reali privo di radici complesse a parte immaginaria non nulla (quindi con somma delle molteplicità delle radici reali = n)

Chiamo **permanenza** ogni coppia di coefficienti consecutivi dello stesso segno *, **variazione** ogni coppia di coefficienti consecutivi di segno discorde *. Allora

la somma delle molteplicità delle radici positive è uguale al n. di variazioni

la somma delle molteplicità delle radici negative è uguale al n. di permanenze

* se ha coefficienti nulli posso assegnare un segno arbitrario.

Una forma quadratica reale $q: V \to \mathbb{R}$ è detta **definita positiva** se $\forall v \in V - \{\bar{0}_V\} \quad q(v) > 0$

definita negativa se $\forall v \in V - \{\bar{0}_V\} \quad q(v) < 0$

COR- q forma quadratica reale con matrice di Gram A è def. positiva $\Leftrightarrow \sigma(A) = (n, 0)$
negativa $(0, n)$

Ho anche:

Criterio di Sylvester:

Siano $M_1, \dots, M_n$ minori principali di A ognuno orlato del precedente

cioè intersezione di righe e colonne degli stessi indici

q risulta def. pos. $\iff$ $|M_1| > 0$, …, $|M_n| > 0$ $\quad + + + + \cdots +$

q risulta def. neg. $\iff$ $\forall i \quad (-1)^i |M_i| > 0$ $\quad - + - \cdots$

strettamente!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = A$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = A$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} \quad \det > 0$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \det > 0$$

$$M_3 = A \quad \det < 0$$