V $\quad \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n) \quad \mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_n)$

Cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$: (l'automorfismo

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

(componenti di v risp. a $\mathcal{B}$) $\longmapsto$ (componenti di v risp. a $\mathcal{B}'$)

$$\begin{tikzcd}
 & & v \quad V \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}'}"] \arrow[dll, mapsto] \arrow[drr, mapsto, bend left] & & \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[rrrr, mapsto, bend right] & \mathbb{R}^n \arrow[rr] & & \mathbb{R}^n & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$v =_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n) \iff v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$=_{\mathcal{B}'} (y_1, \dots, y_n) \iff v = y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

chi è?

E è la matrice delle componenti dei vettori $v_1, \dots, v_n$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$

$$E = \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_n^1 \\ \dots & & \dots \\ e_1^n & \dots & e_n^n \end{pmatrix}$$

$$v_1 = e_1^1 w_1 + \dots + e_1^n w_n$$

$$v_2 = e_2^1 w_1 + \dots + e_2^n w_n$$

$$v_n = e_n^1 w_1 + \dots + e_n^n w_n$$

$$(v_1 \dots v_n) = (w_1 \dots w_n) \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ e_1^n & & e_n^n \end{pmatrix}$$

$$F = E^{-1} \quad E = F^{-1}$$

$$(v_1 \dots v_n) = (w_1 \dots w_n) \cdot E$$

$$(w_1 \dots w_n) = (v_1 \dots v_n) F$$

φ forma bil simm su V $\dim V = n$

risp. a $\mathcal{B}$ sia rappresentata da A

risp. a $\mathcal{B}'$ sia rappesentata da A'

$$A' = \underset{t(F^{-1})}{{}^tE} \; A \; \underset{F^{-1}}{E}$$

$T: V \to V$ lineare

C sia associata a T risp. alla base $\mathcal{B}$

C' sia associata a T risp. alla base $\mathcal{B}'$

$$C' = E^{-1} \cdot C \cdot E = F \cdot C \cdot F^{-1}$$

$$t^5 - 14t^4 + 23t^3 + 276t^2 - 645t - 798$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \sigma = (3,2)$$

Forma canonica per congr. di A in $\mathbb{C}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Forma canonica per congr. di A in $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & -1 & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{C}$

$p(x) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ le radici di $p(x)$ cioè

$p(\alpha_1) = 0, \dots, p(\alpha_n) = 0$

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_2\alpha_n + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n$$

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}P^2$

un iperpiano (in questo caso una retta) ha equazione

$aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0$

per es.

$3X_0 - 2X_1 + 5X_2 = 0$

Cos'è? È l'insieme dei punti le cui coordinate (X_0, X_1, X_2) soddisfano l'eq.

Definizione fighetta:

l'iperpiano è la classe di proporzionalità della forma lineare

$aX_0 + bX_1 + cX_2$

Perché per le iperquadriche ho SOLO la definizione fighetta?

Perché in $\mathbb{R}$ (ma anche su altri campi) NON HO corrispondenza biunivoca fra (classi di prop di f. q $\neq 0$) e (insiemi di punti che soddisfano eq. di 2° gr)

Es. $Q = [X_0^2 + 5X_1^2 + 3X_2^2]$

è una conica

$Q' = [X_0^2 + 2X_1^2 + 7X_2^2]$

è una conica diversa: infatti non c'è nessun λ per cui sia

$$X_0^2+2X_1^2+7X_2^2 = \lambda\left(X_0^2+5X_1^2+3X_2^2\right)$$

eppure le loro immagini (cioè gli insiemi di punti che annullano le rispettive forme sono uguali: $\emptyset$

$$X_0^2+2X_1^2+7X_2^2=0$$

in $\mathbb{R}$ è soddisfatta solo da $(0,0,0)$ che non rappresenta un punto

Idem per

$$X_0^2+5X_1^2+3X_2^2=0.$$

$$x_0^2 - 4x_0x_1 + 5x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$$