Sia $\overline{P} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n) \in W$

Allora $A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ma allora

$$(\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\overline{x}_1 \dots \overline{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \overline{P} \in \mathrm{Im}$$

$\overline{P} = [\overline{X}_0, \ldots, \overline{X}_n] = u$

$\overline{Q} = [\overline{Y}_0, \ldots, \overline{Y}_n] = v$

$\varphi$ ed $f$ siano rappresentate da $A \in M_{n+1}(K)$ simmetrica
bil. quadr.

$$\varphi(u,v) = \underset{1 \times (n+1)}{(\overline{X}_0 \cdots \overline{X}_n)} \cdot \underset{(n+1)\times(n+1)}{A} \cdot \underset{(n+1)\times 1}{\begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix}} = \quad 1 \times 1$$

$$= {}^t\left( (\overline{X}_0 \cdots \overline{X}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix} \right) =$$

$$= (\overline{Y}_0 \cdots \overline{Y}_n) \cdot {}^tA \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} =$$

$$= (\overline{Y}_0 \cdots \overline{Y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = \varphi(v,u)$$

Perciò F è coniugato a $\bar{Q}$ $\iff$

$$(\bar{X}_0 \cdots \bar{X}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix} = 0$$

o, equivalentemente,

$$(\bar{Y}_0 \cdots \bar{Y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} = 0$$

Sia $\overline{P} \in \mathbb{P}(W[f])$. Allora

$$A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cerco l'insieme dei punti

$X = [(X_0, \dots, X_n)]$ che

sono coniugati a $\overline{P}$.

$$(X_0 \dots X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = 0$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_0 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ogni $(n+1)$-pla $(X_0, \dots, X_n)$ soddisfa:

$$(X_0 \dots X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} =$$

$$= (X_0 \dots X_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Quindi TUTTI i punti dello spazio sono coniugati a $\overline{P}$.

---

Sia $\overline{Q} = [(Y_0, \dots, Y_n)] \notin V[f]$

L'insieme dei punti $X$ coniugati a $\overline{Q}$ è dato da

$$(X_0 \dots X_n) A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$$

equivalentemente

$$(\bar{y}_0 \dots \bar{y}_n) \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

non è $(0 \dots 0)$; è una $(n+1)$-pla non nulla $(a_0 \dots a_n)$.

Perciò l'insieme dei punti $X = [(x_0 \dots x_n)]$ coniugati a $\bar{Q}$ è descritto da:

$$a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0$$

non tutti nulli

cioè è un iperpiano

$\overline{P} \in \tau(\overline{Q}) \iff \begin{pmatrix}\overline{X}_0\\ \vdots \\ \overline{X}_n\end{pmatrix}$ soddisfa

l'eq. di $\tau(\overline{Q})$, che è

$$(\overline{Y}_0 \dots \overline{Y}_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix}X_0\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff (\overline{Y}_0 \dots \overline{Y}_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix}\overline{X}_0\\ \vdots\\ \overline{X}_n\end{pmatrix} = 0$$

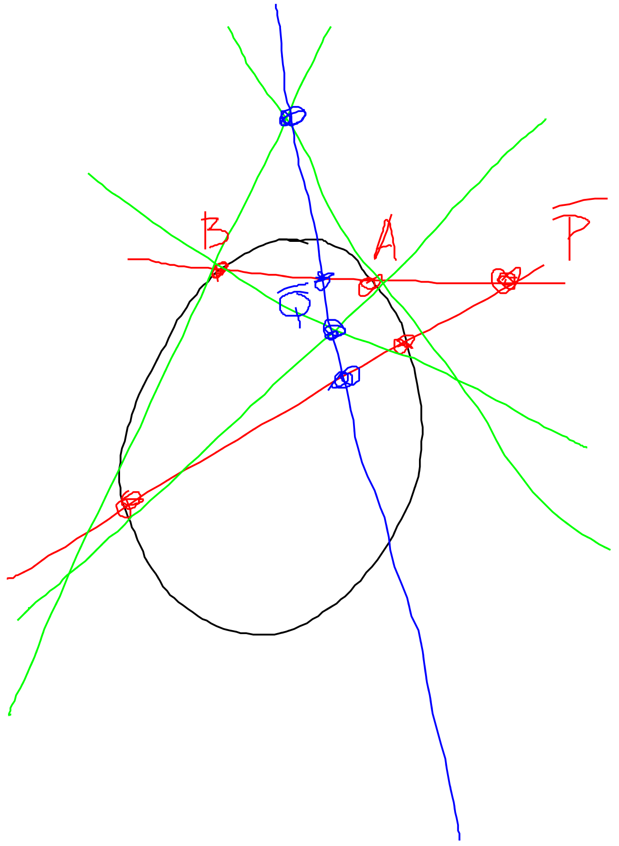
$$\iff (\overline{X}_0 \dots \overline{X}_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix}\overline{Y}_0\\ \vdots\\ \overline{Y}_n\end{pmatrix} = 0$$

$\iff (\overline{Y}_0 \dots \overline{Y}_n)$ soddisfa

l'eq. di $\tau(\overline{P})$, che è

$$(\overline{X}_0 \dots \overline{X}_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix}X_0\\ \vdots\\ X_n\end{pmatrix} = 0$$

$\iff Q \in \tau(\overline{P})$


B
A
P

$$\bar P = [(\bar y_0, \dots, \bar y_n)]$$

$\tau(\bar P)$:

$$(\bar y_0, \dots, \bar y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$\bar P \in \tau(\bar P) \iff (\bar y_0, \dots, \bar y_n)$ soddisfa

$$\iff (\bar y_0 \dots \bar y_n) \, A \begin{pmatrix} \bar y_0 \\ \vdots \\ \bar y_n \end{pmatrix} = 0$$

$\iff \bar P$ soddisfa l'eq. della iperquadrica

$\iff \bar P \in I_n$