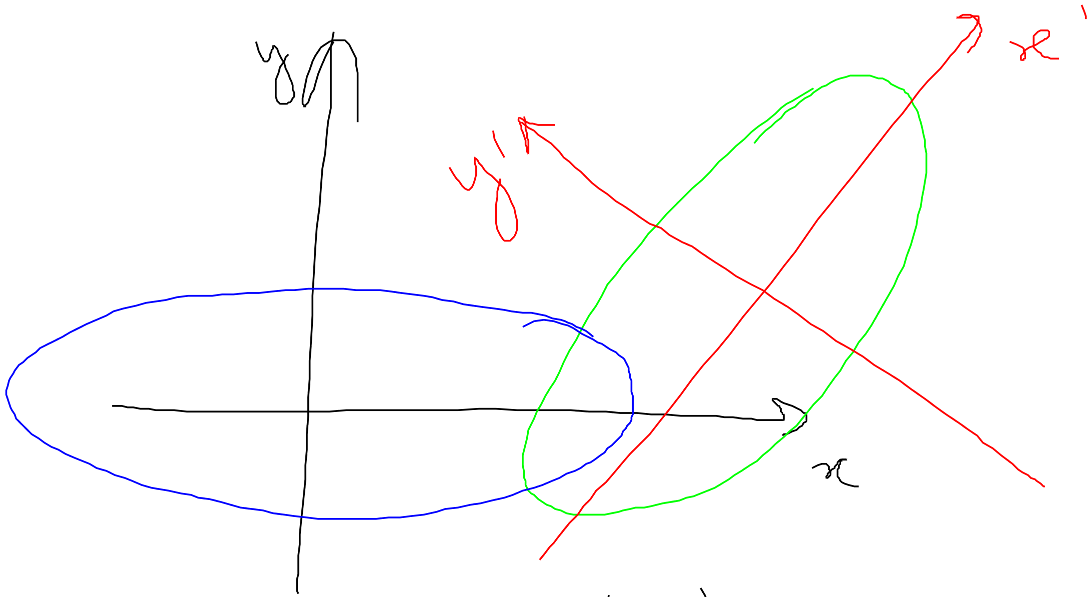

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Siano $[f]$ di discr. A,

$[g]$ di discr. B,

proiettivamente equivalenti.

Allora $\exists\, \lambda \in K - \{0\}$ per cui

A è congruente a λB.

Se siamo in $K = \mathbb{C}$ questo avviene $\Longleftrightarrow$ A è congr. a B

Totale: in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, $[f]$ e $[g]$ sono proiett. equivalenti

$$\Updownarrow$$

A è congr. a B

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

A congruente a λB

$\swarrow \lambda > 0$ $\qquad$ $\searrow \lambda < 0$

A è congr. a B $\qquad$ A è congr. a $-B$

Classificazione pro. delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ $\mathbb{C}P^2$

---

rango 1

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \\ & 0 & \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 = 0$

una retta (contata 2 volte)

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

---

rango 2

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

unione di 2 rette

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (intersez. delle 2 rette)

---

rango 3

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

ha ∞ punti, non contiene rette

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

Classif pro. delle quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

rango 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 = 0$

un piano (contato 2 volte)

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

---

rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

unione di 2 piani

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ una retta (intersezione dei 2 piani)

---

rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

ha ∞ punti, non contiene piani, è l'unione di ∞ rette passanti per uno stesso punto

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (quel punto!)

rango 4

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$

contiene ∞ punti, non contiene piani, per ogni punto su Q passano 2 rette contenute in Im

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Classif. pro. delle coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

rango 1

$\sigma = (1,0)$ o $(0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}: X_0^2 = 0$ o $-X_0^2 = 0$

una retta (contata 2 volte)

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ o $\begin{cases} -X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

---

rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$

$\mathrm{Im}: X_0^2 + X_1^2 = 0$

un punto

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso punto

---

$\sigma = (1,1)$

$\mathrm{Im}: X_0^2 - X_1^2 = 0$

$(X_0+X_1)(X_0-X_1) = 0$

unione di 2 rette

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(stessa segnatura)

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (intersez. delle 2 rette)

rango 3

$\sigma = (3,0) \circ (0,3)$ $\qquad$ $Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\emptyset$

conica vuota o immaginaria

$\sigma = (2,1) \circ (1,2)$ $\qquad$ $Im: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

contiene ∞ punti, non contiene rette

conar.d

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_1 = 0 \end{cases}$ $\qquad \emptyset$

Conica non degenere reale

Class. pro. delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

rango 1

$\sigma = (1,0)$ o $(0,1)$ Im: $X_0^2 = 0$

un piano (contata 2 volte)

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

---

rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$

una retta

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

---

$\sigma = (1,1)$ Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$

$(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$

unione di 2 piani

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ una retta (intersezione dei 2 piani)

rango 3

$\sigma = (3,0) \circ (0,3)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

un punto

cono proiettivo immaginario

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso punto

---

$\sigma = (2,1) \circ (1,2)$

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

cono proiettivo reale

$Im: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

contiene ∞ punti, non contiene piani, è unione di ∞ rette (generatrici) passanti per uno stesso punto

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (quel punto!)

---

rango 4

$\sigma = (4,0) \circ (0,4)$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$

$\emptyset$

quadrica vuota o immaginaria

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$

$\sigma = (3,1)$ o $(1,3)$ $Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

contiene ∞ punti, non contiene piani, non contiene rette

quadrica ellittica

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$\sigma = (2,2)$ $Im: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

contiene ∞ punti non contiene piani, per ogni suo punto passano 2 rette (generatrici) contenute in Im

quadrica iperbolica

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ -X_3 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$