Class. pro. delle iperq. di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

rango 1

$\sigma = (1,0)$ o $(0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 = 0$ un punto (contato 2 volte)

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

---

rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

$\sigma = (1,1)$ Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ $(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$

due punti

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

Com'è fatta l'Im di
$X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$?

$V\equiv(0,0,0,1)$

Sia $P\in Im$ $P\equiv(a,b,c,0)$
t.c. $a^2+b^2-c^2=0$

Generico punto della retta
VP ha coord.

$\lambda(a,b,c,0)+\mu(0,0,0,1)=$
$=(\lambda a,\lambda b,\lambda c,\mu)$

Verifico che soddisfa $X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$

$(\lambda a)^2+(\lambda b)^2-(\lambda c)^2=\lambda^2(a^2+b^2-c^2)=$
$=\lambda^2\cdot 0=0$

Perciò la retta VP è contenuta
in Im

Im contiene piani?

Se fosse così, un piano contenuto in Im conterrebbe sicuramente V e due punti

$A, D \in Im$

$A \equiv (a, b, c, 0)$, $D \equiv (d, e, f, 0)$

$a^2+b^2-c^2=0$ $\quad$ $d^2+e^2-f^2=0$

Cosa passo dedurre dal fatto che il minimo sottospazio contenente A, D, V sia contenuto in Im?

$$\begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In particolare sarebbe contenuto in Im il punto

$(a+d, b+e, c+f, 0)$

Ciò è sarebbe

$$(a+d)^2+(b+e)^2-(c+f)^2=0$$

Si deduce $2(ad+be-cf)=0$

Da ciò

$$(ad+be)^2=(cf)^2$$

da cui

$$(bd-ae)^2=0$$

Ho anche

$$(ad)^2=(cf-be)^2$$

da cui

$$(bf-ce)^2=0$$

Deduco che A, D, V sono necessariamente su una stessa retta

Se dovessi studiare com'è fatta Im, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, di

$$-2X_0X_1 + X_0X_2 - 2X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

sarebbe un casino mica male. Ma se studio il suo discriminante

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

trovo $\sigma = (1,1)$, quindi so che ha la stessa struttura di $X_0^2 - X_1^2 = 0$, cioè è l'unione di 2 rette.

Ma infatti si può trovare la matrice dell'omografia che trasforma una nell'altra:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3/2 \\ -1 & -1 & -1/2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e in effetti

$$^tE \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot E = A$$

Volendo, trovo allora che il punto comune alle due rette è $(-2,1,2)$, che posso trovare o direttamente come vertice della conica, o come trasformato del punto comune a $X_0+X_1=0$ e $X_0-X_1=0$.

La conica data ha Im costituita dalle due rette che trovo trasformando $X_0+X_1=0$ e $X_0-X_1=0$

$X_0+X_2=0$ $\quad\quad -2X_1+X_2=0$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ & \text{———} & \\ a^n_1 & \text{———} & a^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

affinità di A^n

Passo all'ampliamento pro.

$$\lambda \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \text{— — — —} & \\ b_n & a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$x_i = \frac{X_i}{X_0} \qquad y_i = \frac{Y_i}{Y_0}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \text{— — — —} & \\ b_n & a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & \cdots & 0 \\ 0 & a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ 0 & & & \\ \vdots & \text{———} & & \text{———} \\ 0 & a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

In Π_∞:

$$\lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$