$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1^2 + 6X_1X_2 \cancel{- 6X_0X_1} \cancel{- 24X_0X_2} \cancel{+ X_0^2} = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1(X_1 + 6X_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = -6X_2 \end{cases}$$

$$P_{1\infty} = (0, 0, 1) \qquad P_{2\infty} = (0, -6, 1)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -12 \\ -3 & 1 & 3 \\ -12 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$a_1: \; -12 + 3x = 0$

$a_2: \; 6 - 3x - 18y = 0$

$2 - x - 6y = 0$

Verificare che $\mathcal{C}$:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6y - 1 = 0$$

e trovarne il centro

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{matrix}} \\ -3 & & \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 13 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 13 \end{vmatrix} \neq 0$$

non deg.

$$M_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad |M_{\infty}| = 0$$

A_{∞}

parabola

Prendo 2 punti sulla retta di cui voglio trovare il polo.
Qui è r_{∞}, scelgo $X_{\infty} \equiv (0,1,0)$, $Y_{\infty} \equiv (0,0,1)$

Trovo le polari

$$\begin{matrix} (0 & 1 & 0) \\ (0 & 0 & 1) \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} p_1: & X_1 - 2X_2 = 0 \\ p_2: & -3X_0 - 2X_1 + 4X_2 = 0 \end{cases}$$

Il polo è l'int.

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ -3 & -2 & 4\end{pmatrix}(x_0, x_1, x_2) \sim \left(\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}0 & -2\\ -3 & 4\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}\right)$$

$$= (0, 6, 3)$$

$$\sim (0, 2, 1)$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6y - 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - \cancel{6x_0x_2} - \cancel{x_0^2} = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - 2x_2)^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad (0, 2, 1)$$

Trovare il polo della retta $s: x - y - 2 = 0$ rispetto alla parabola

---

Cerco 2 punti su s e ne interseco le polari

$P_1 = (2, 0)$ $(1, 2, 0)$ $P_2 = (0, -2)$ $(1, 0, -2)$

$$\begin{matrix}(1\ 2\ 0)\\ (1\ 0\ -2)\end{matrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$r_1:\ -1+2x-7y=0$$

$$r_2:\ 5+4x-11y=0$$

$$\begin{cases}2x-7y=1\\ 4x-11y=-5\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-7y=1\\ 3y=-7\end{cases}\qquad\begin{cases}x=\dfrac{1+\frac{49}{3}}{2}=\dfrac{52}{6}\\ y=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$

Se cerco il centro della conica di discr.

$$A=\begin{pmatrix}a_{00} & a_{01} & a_{02}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12}\\ a_{20} & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$$

lo posso trovare come intersezione delle polari di X_∞ e Y_∞ !

cioè risolvo il sistema

$$\begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

trovando $\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_{10} & a_{12} \\ a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{vmatrix} \right)$

cioè (formula da ricordare)

$$\boxed{\text{centro} = (A_{00}, A_{01}, A_{02})}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} |M_1| &= 1 > 0 \\ |M_2| &= 2 > 0 \\ |M_3| &= 14 > 0 \end{aligned}$$

def pos

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = -1 < 0$

$|M_2| = 2 > 0$

$|M_3| = -14 < 0$

def. neg.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(4,0)$ $\det > 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$(0,4)$ $\det > 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$(2,2)$

$\det > 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$(3,1)$ $\det < 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$(1,3)$ $\det < 0$

Classificare

$$(3\lambda-1)x^2+(1-\lambda)y^2+2\lambda xz+2z-4\lambda=0$$

$$A=\begin{pmatrix}-4\lambda & 0 & 0 & 1\\ 0 & (3\lambda-1) & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & (1-\lambda) & 0\\ 1 & \lambda & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|A|=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-4\lambda & 0 & 1\\ 0 & (3\lambda-1) & \lambda\\ 1 & \lambda & 0\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-4\lambda & 0 & 1\\ 4\lambda^2 & (3\lambda-1) & 0\\ 1 & \lambda & 0\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)(4\lambda^3-3\lambda+1)=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)(4\lambda^2-4\lambda+1)=$$

$$=(1-\lambda)(\lambda+1)(2\lambda-1)^2$$

	4	0	-3	1
-1		-4	+4	-1
	4	-4	1	0

		-1		$1/2$		1	
$(1-\lambda)$	+	+	+	+	+	0	−
$(\lambda+1)$	−	0	+	+	+	+	+
$(2\lambda-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$\lvert A\rvert$	−	0	+	0	+	0	−

q. ell

deg.

q. ip. ~~o imm~~

q. ell

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}-4 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}} & \begin{matrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\\ \begin{matrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{matrix} & \begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 0 & 1\\ 4 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$M_{00} = \begin{pmatrix} (3\lambda-1) & 0 & \lambda \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |M_{00}| = \lambda \begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ (1-\lambda) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^2(\lambda-1)$$

* mi dice che M_{00} è sempre indefinito

λ	$\|A\|$	rA	M_{00} *	quadriche
$\lambda < -1$	$-$	4	ind	iperboloidi ell.
$\lambda = -1$	0	3	ind	cono reale
$-1 < \lambda < 0$	$+$	4	ind	iperboloidi iperb.
$\lambda = 0$	$+$	4	0	paraboloide iperb.
$0 < \lambda < \frac{1}{2}$	$+$	4	ind	iperboloidi iperb.
$\lambda = \frac{1}{2}$	0	3	ind	cono reale
$\frac{1}{2} < \lambda < 1$	$+$	4	ind	iperboloidi iperb.
$\lambda = 1$	0	3	0	cilindro reale
$\lambda > 1$	$-$	4	ind	iperboloidi ell.

$\lambda = 1 \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Intersez. $z = 0$

$$-4x_0^2 + x_1^2 + \cancel{2x_3x_0} + \cancel{2x_3x_1} = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ -4x_0^2 + x_1^2 = 0 \end{cases}$$

$$(-2x_0 + x_1)(2x_0 + x_1) = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \end{cases}$$

Trova almeno il punto $(1, 2, 0, 0)$ perciò il cilindro è reale

Quadriche di rango 3

Posso avere

Im $\cap \Pi_\infty$ non degenere

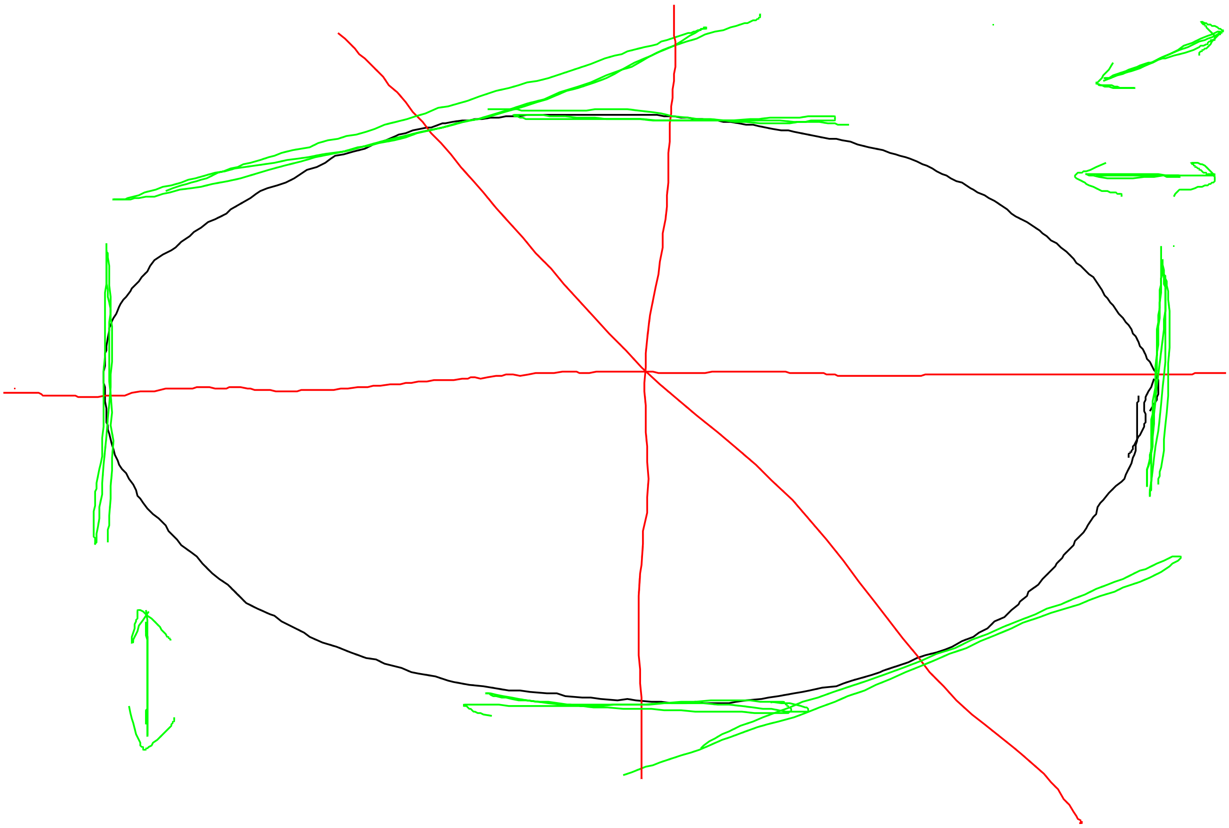
$\exists$ piani c'$\cap$ $\cap$ non deg.re

	vertice proprio	vertice improprio
(2,1) o (1,2) cono pro reale	cono affine reale	cilindro reale
cono pro imm (3,0) o (0,3)	cono affine immaginario	cilindro immag.

Im $\cap \Pi_\infty$ non deg. imm.

vertice proprio	vertice improprio
Im $\cap \Pi_\infty$ non deg	Im $\cap \Pi_\infty$ deg.
$\lvert M_{00} \rvert \neq 0$	$\lvert M_{00} \rvert = 0$

Tutti e soli i piani che intersecano un cono proiettivo in una conica degenere sono quelli contenenti il vertice



$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Prendo il generico punto improprio $(0, l_1, \dots, l_n)$

Il suo iperpiano polare è il generico iperpiano diametrale:

$$(X_0\ X_1\ \cdots\ X_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = 0$$

$$(X_0, X_1, \dots, X_n)$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = a_{00}\, 0 + a_{01}\ell_1 + \dots + a_{0n}\ell_n \\ \alpha_1 = a_{10}\, 0 + a_{11}\ell_1 + \dots + a_{1n}\ell_n \\ \vdots \\ \alpha_n = a_{n0}\, 0 + a_{n1}\ell_1 + \dots + a_{1n}\ell_n \end{cases}$$

$$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n = 0$$

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_0 = 0$$

Quand'è che questa iperpiano è $\perp$ alla direzione $(0, \ell_1, \dots, \ell_n)$

$$\perp \iff \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists \lambda \neq 0 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_n \end{pmatrix}$$

Osservo che

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} l_1 + \dots + a_{1n} l_n \\ \vdots \\ a_{n1} l_1 + \dots + a_{nn} l_n \end{pmatrix} =$$

$$= M_{\infty} \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

Totale: l'iperpiano $\bar{e}$ principale $\Leftrightarrow$ è $\perp$ alla sua direzione coniugata $\Leftrightarrow$ $\exists \lambda \neq 0$ t.c. $M_0^a \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$

$x^2+2y^2+3z^2+1=0$
non è di rotaz.;
ha solo 3 piani princi-
pali: piano xy, piano xz e
piano yz

$x^2+y^2+3z^2+1=0$
è di rotazione, ha
un piano principale per
i fatti suoi: piano xy
tutti i piani passanti per
l'asse z sono principali

Discriminanti delle coniche improprie

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ $a, b \neq 0$ discordi

paraboloide iperb.

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ $a, b \neq 0$ concordi

paraboloide ellittico

Caso part. $a = b$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$ $a, b, c \neq 0$

a, b concordi, discordi da c

iperboloide iperbolico ellittico

Caso part. $a = b$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{pmatrix}$$ $a, b, c \neq 0$ concordi

ellissoide reale

immag.

Caso part.:

$a = b \neq c$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & c \end{pmatrix}$$

Caso particolarissimo:

$a = b = c$

$$\begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$$