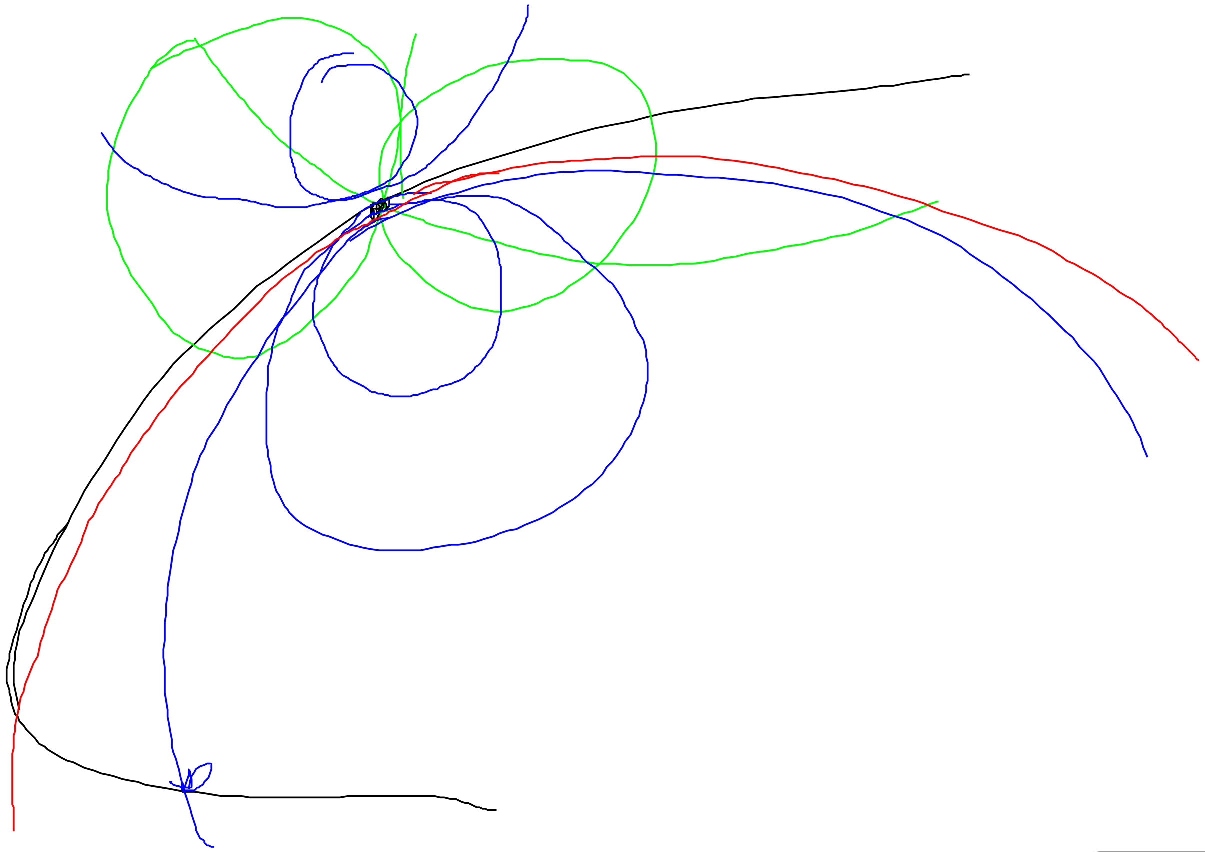


11/6/2010 ES. 3

$$C: \begin{cases} x = 2\alpha^2 + \alpha - 1 \\ y = 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{cases}$$

trovare la circ. osc. a $C$ in $A \equiv (-1,-1)^{\alpha=0}$ e determinare l'ordine di contatto.

Generica circonferenza:

$$\underbrace{x^2 + y^2 + ax + by + c}_{f(x,y)} = 0$$

$$\Phi(\alpha) = (2\alpha^2+\alpha-1)^2 + (2\alpha^2-\alpha-1)^2 + a(2\alpha^2+\alpha-1) + b(2\alpha^2-\alpha-1) + c =$$

In $\alpha = 0$

$$= 2a\alpha^2 + a\alpha - a + 2b\alpha^2 - b\alpha - b + c + 8\alpha^4 - 6\alpha^2 + 2$$

$-a-b+c+2$

$$\Phi'(\alpha) = 4a\alpha + a + 4b\alpha - b + 32\alpha^3 - 12\alpha$$

$a-b$

$$\Phi''(\alpha) = 4a + 4b + 96\alpha^2 - 12$$

$4a+4b-12$

$$\Phi'''(\alpha) = 192\alpha$$

$0$

$$\Phi^{IV}(\alpha) = 192$$

$192$

Impongo

$$\begin{cases} \Phi(0) = 0 \\ \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a-b+c+2=0 \\ a-b=0 \\ 4a+4b-12=0 \end{cases}$$

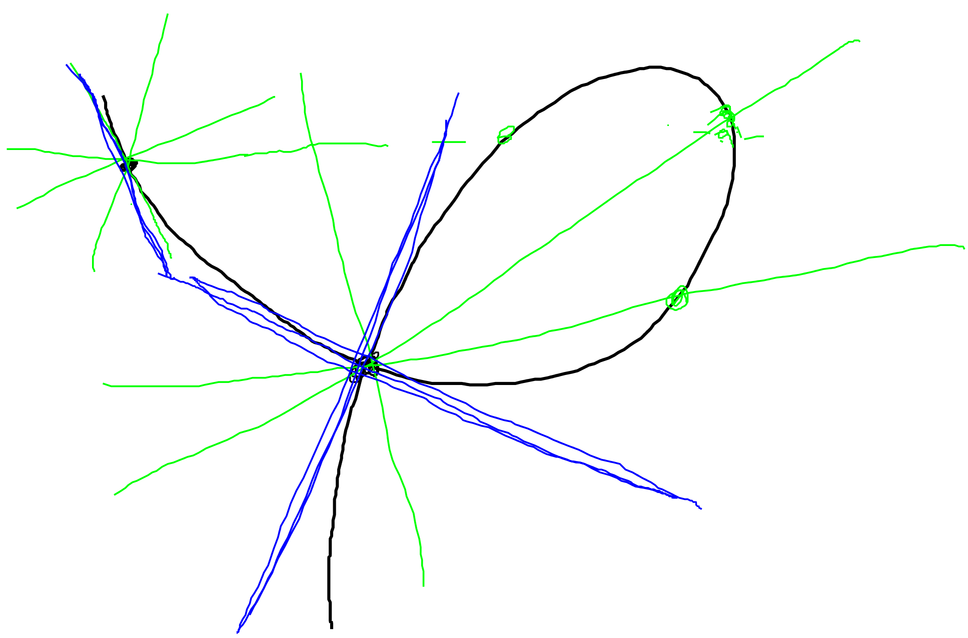
$$\begin{cases} a - b = 0 \\ 8b = 12 \\ -2b + c + 2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

Circ. osc.:

$$x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}y + 1 = 0$$

Contatto di ordine 3.

---



$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)$$

abbreviazione per

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2k\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

e simili per esponenti $s = 2, 3, \ldots$

---

$C \; f(x, y) = 0 \qquad P \equiv (x_0, y_0) \in C \quad f(x_0, y_0) = 0$

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) +$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{1}{(s-1)!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s-1} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{s!}\left((x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} f(x_0, y_0) +$$

$$+ \cdots$$

Generica retta per P:

$$(y-y_0) = k(x-x_0)$$

Interseco:

$$\begin{cases} (y-y_0) = k(x-x_0) \\ f(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$y-y_0 = k(x-x_0)$$

$$0 = f(x,y) = f(x_0,y_0) +$$

$$(x-x_0)\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0) +$$

$$\vdots$$

$$+\frac{1}{(s-1)!}(x-x_0)^{s-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s-1} f(x_0,y_0) +$$

$$+\frac{1}{s!}(x-x_0)^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{s} f(x_0,y_0) +$$

$$+ \dots$$

Se P è punto s-pla, allora per ogni retta per P (quindi per ogni $k$) $x_0$ deve essere radice s-pla, ma allora per $1 \leq h \leq s-1$ dev'essere

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{h} f(x_0,y_0) = 0$$

per ogni $k$. Questo è possibile $\Leftrightarrow$ tutte le derivate parziali di $f$ in $P$ sono nulle in tutti gli ordini $h$ con $1 \leq h \leq s-1$.

Se il punto ha molteplicità esattamente $s$, la generica retta per $P$ ha in $P$ raccolte esattamente $s$ intersezioni, perciò l'uguaglianza

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f(x_0, y_0) = 0$$

NON è un'identità in $k$.

Ma allora è un'equazione in $k$ (di grado atteso $s$). Le soluzioni di tale equazione forniscono quelle particolari rette per $P$ che hanno raccolte in $P$ almeno $s+1$ intersezioni: le tangenti nel punto multiplo.