Patrizio Frosini
patrizio.frosini@unibo.it

Anelli
Matrici
Determinante
Teorema di Laplace
Metodo di Gauss per calcolare il determinante
Matrice inversa

Anello

$\boxed{\text{Gruppo}}$

$(\mathbb{Z}, +)$

1) + è associativa: $\underline{\forall a, b, c \in \mathbb{Z}}$

$(a+b)+c = a+(b+c)$

2) esiste un elemento neutro 0 per +

$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a+0 = 0+a = a$

3) Ogni elemento $a \in \mathbb{Z}$ ammette inverso rispetto a $+$:

$\forall a \in \mathbb{Z} \ \exists b \in \mathbb{Z}$ t.c. $a+b=b+a=0$

Es: $3+(-3)=0$

Def.: $(G, *)$ è un gruppo se

1) $\forall a,b,c \in G \quad \underline{(a*b)*c} = \underline{a*(b*c)}$

2) $*$ ammette elemento neutro u

$(\forall a \in G \quad a*u=u*a=a)$

3) ogni $a \in G$ ammette inverso risp. a $*$

$(\forall a \in G \ \exists b \in G$ t.c. $a*b=b*a=u)$

NB: $*: G \times G \to G$

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo

$$3+4=7$$

$$(3,4) \xrightarrow{+} 7$$

$(\mathbb{Z}, -)$ è un gruppo? NO – non è associativa

$$(1-1)-1=-1, \quad 1-(1-1)=1$$

$$(a*b)*c \stackrel{?}{=} a*(b*c)$$

$(\mathbb{R},+)$ è un gruppo

1) $+$ è associativa

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

2) $\exists$ elemento neutro (0)

$$a+0 = 0+a = a$$

3) $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists b \in \mathbb{R}$ t.c. $a+b=b+a=0$

$(\mathbb{Q},+)$ è un gruppo

$(\mathbb{C},+)$ " "

$(\mathbb{N}, +)$ è un gruppo? NO

(Interi pari, $+$) è un gruppo? SÌ

(Polinomi in x a coeff. in $\mathbb{R}$, $+$) è un gruppo? SÌ

$$(3x^3 - x^2 + 7) + (x^4 - 2x^2) = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 7$$

$(\mathbb{Z}_n, +)$ è un gruppo

$\{0, 1, \dots, n-1\}$

$\mathbb{Z}_4$

$\{0, 1, 2, 3\}$

$2+3 = 1$

$1+3 = 0$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

•	?	!	X
?	X	X	?
!	!	?	!
X	X	X	!

$G = \{?, !, X\}$

$(G, \bullet)$

Un'altro gruppo famoso:

$$(S_n, \circ)$$

$S_n :=$ insieme delle permutazioni (cioè corrispondenze biunivoche) su $\{1, \dots, n\}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$p(1) = 3$

$p(2) = 1$

$p(3) = 5$

$p(4) = 2$

$p(5) = 4$

Se $p, q \in S_n$ posso considerare la loro composizione

$$q \circ p$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$q \circ p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$p \circ q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'operazione $\circ$ **NON** è commutativa

$$p \circ q \neq q \circ p$$

$(S_n, \circ)$ è un gruppo non commutativo

1) $\forall\, p, q, r \in S_n \quad (p \circ q) \circ r = p \circ (q \circ r)$

2) $\exists$ elemento neutro $\quad p \circ id = id \circ p = p$

$\left(id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \right)$

3) $\forall\, p \in S_n \quad \exists\, q \in S_n$ t.c. $p \circ q = q \circ p = id$

$(q = p^{-1})$

NB: supponiamo $n \geq 3$

Un altro esempio di gruppo NON commutativo:

(Movimenti rigidi dello spazio, operazione di composizione)

Anello

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ gode di queste proprietà:

1) $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo
2) valgono queste uguaglianze per ogni scelta di a, b, c in $\mathbb{Z}$:
   i) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
   $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$
3) l'operazione $\cdot$ è associativa
   $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c))$

Diciamo che $(A, +, \cdot)$ è un anello se

1) $(A, +)$ è un gruppo commutativo
2) $\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

3) $\forall a, b, c \in A \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Se $(A,+,\cdot)$ è un anello e l'op. $\cdot$ è commutativa ($\forall a,b \in A \ a\cdot b = b\cdot a$) diciamo che tale anello è <u>commutativo</u>.

Se l'op. $\cdot$ ammette unità u ($\forall a \in A \ a\cdot u = u\cdot a = a$), allora diciamo che tale anello ha <u>unità</u>.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un anello commutativo

con unità (1)

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un anello commutativo
con unità.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ " "

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ " "

Un anello <u>senza unità</u>:

(Interi pari, +, ·)

L'anello dei polinomi

(Insieme dei polinomi in x a coeff. reali, +, ·)

Matrici :

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{3} \times \underline{3}$$

$$\begin{pmatrix} e & -\pi & 7 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \qquad 2 \times 3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij} \right)$$

indice di riga

indice di colonna

$$\underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{\text{riga}} \times \underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{\text{colonna}} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{17} \\ \boxed{20} & \boxed{22} \end{pmatrix} \end{array} \qquad 2 \times 2$$

$$\boxed{\mathbb{Z}_{24}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 17 \\ 20 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 23 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x^2+1 & x-7 \\ x^4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3x^2 & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^2+1 & x^2+x-7 \\ x^4 & 1 \end{pmatrix}$$

Quando due matrici M e N sono dello stesso tipo $m \times n$ si può definire la matrice somma

$$M+N=(m_{ij}+n_{ij}).$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

M di tipo $m \times r$

N di tipo $r \times n$

Allora si può definire

$$MN = \left(c_{ij} = \sum_{s=1}^{r} m_{is}\, n_{sj} \right)$$

$$MN = (c_{ij})$$

$(M_n(\mathbb{A}), +, \cdot)$ è un anello con unità

matrici $n \times n$

Tale anello <u>non</u> è, in generale, commutativo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Campo = anello commutativo con unità in cui ogni elemento $\neq 0$ ammette inverso rispetto al prodotto.

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ " "

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ " "

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ " " (con p primo)

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo

$4 \cdot 3 = 2$

$3 \cdot 3 = 4$

$(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ <u>NON</u> è un campo

$2 \cdot 3 = 0$

Il determinante è una funzione da $M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A := \underline{\sum_{p \in S_n}} \underline{\text{sign}\, p} \; \underline{a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)}}$$

$$p : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$$

$$n(n-1)(n-2) \cdots 1$$

$$\shortparallel$$

$$n!$$

$$\operatorname{sign} p = \begin{cases} 1 & \text{se } p \text{ può essere ottenuto con un numero } \underline{\text{PARI}} \text{ di SCAMBI} \\ -1 & \text{se } p \text{ può essere ottenuto con un numero DISPARI di SCAMBI} \end{cases}$$

$$\operatorname{sign}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{array}\right\} \text{4 scambi}$$

$$\det\left(a_{11}\right) = a_{11}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (+1)\; a_{11}a_{22} + (-1)\; a_{12}a_{21}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} +$$

$3! = 6$ addendi

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Il calcolo del determinante di una matrice n×n ~~vale~~ si può ridurre al calcolo di n determinanti di matrici $(n-1)\times(n-1)$

Minore M_{ij} di una matrice M = sottomatrice di M ottenuta da M cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna di M.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \end{pmatrix} \qquad M_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} \underbrace{\det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}_{32} = 32$$

Cofattore A_{ij} dell'elemento di posto (i,j) nella matrice M:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

Teorema di Laplace:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \left(\text{per qualunque scelta di } j\right)$$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \left(\text{per qualunque scelta di } i\right)$$

$$\det\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ j=1 \end{array} =$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} A_{i1} =$$

$$= 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

$$\det A = a_{31}A_{31} + \underset{0}{\underset{\parallel}{a_{32}}}A_{32} + \underset{0}{\underset{\parallel}{a_{33}}}A_{33}$$

$$= 2 \cdot 1 = 2$$

Prima di calcolare det A conviene semplificare la matrice applicando trasf. riga (metodo di Gauss).

---

1) Permutare le righe
2) Moltiplicare una riga per $k \in \mathbb{K}$
3) Aggiungere a una riga un multiplo di un'altra riga.

Esempio

$$\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 5\\ 0 & -6 & -14\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 6 & 5\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix} =$$

$$= 6\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & -9\end{pmatrix} = -54\det\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & \frac{5}{6}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = -54$$

Come si calcola il det A:

1) Si applicano trasf. riga finché la matrice non è divenuta "abbastanza semplice".

2) Si applica Laplace a una riga o una colonna ~~della~~ della matrice che contenga "molti" zeri.

Esercizio:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} = ?$$

2021×2021

Matrice inversa:

Può succedere che, data $A \in M_n(\mathbb{K})$, esista $B \in M_n(\mathbb{K})$, t.c.

$$AB = BA = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Allora si dice che B è l'inversa di A e si scrive $B = A^{-1}$.

Teorema: A è invertibile se e solo se $\underline{\det A \neq 0}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \det A = -1 \neq 0 \quad -\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}}_{=B}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = 0$$

Se $\det A \neq 0$ ci sono due metodi principali per calcolare A^{-1}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^{t}(A_{ij})$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} {}^{t}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = {}^{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$n \times 2n$

3×6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$