Formule di parallelismo e ortogonalità.

Un iperpiano di uno spazio affine n-dimensionale è un sottospazio affine di dimensione $n-1$.

$\mathbb{R}^2$ Un iperpiano di $\mathbb{R}^2$ è una retta.

$$ax + by + c = 0$$

$$(a,b) \neq (0,0)$$

$\mathbb{R}^3$ Un iperpiano di $\mathbb{R}^3$ è un piano.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(a,b,c) \neq (0,0,0)$$

$\mathbb{R}^n$ Un iperpiano ha equazione

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c = 0$$

con $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$.

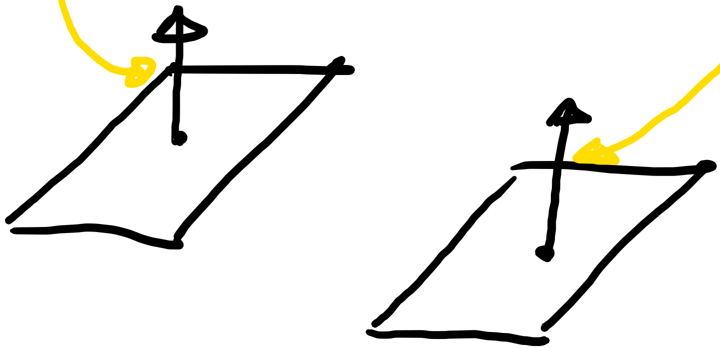
Il problema del parallelismo e dell'ortogonalità per due iperpiani di equazioni

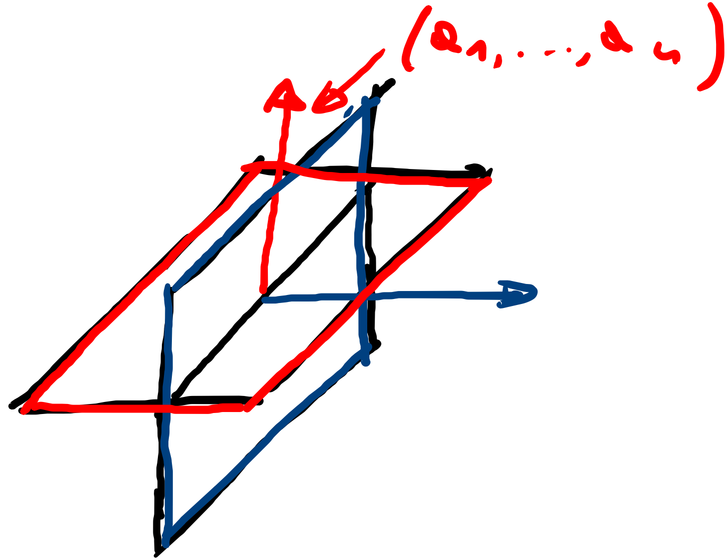
$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c = 0$$

e

$$a_1' x_1 + \dots + a_n' x_n + c' = 0$$

si riduce al problema del parallelismo e dell'ortogonalità fra i due vettori $(a_1, \dots, a_n)$ e $(a_1', \dots, a_n')$.





$(a_1, \ldots, a_n)$

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c = 0$$

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in$ iperpiano α

$$a_1 \underbrace{(x_1 - \bar{x}_1)}_{y_1} + \dots + a_n \underbrace{(x_n - \bar{x}_n)}_{y_n} = 0$$

$(y_1, \dots, y_n)$ appartiene alla giacitura di α.

$$\underline{(a_1, \dots, a_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = 0}$$

Date due iperpiani di equazioni

$\alpha: a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + c = 0$

e

$\alpha' \; a'_1 x_1 + \dots + a'_n x_n + c' = 0$

si ha che $\alpha \perp \alpha' \Longleftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \perp (a'_1, \dots, a'_n)$

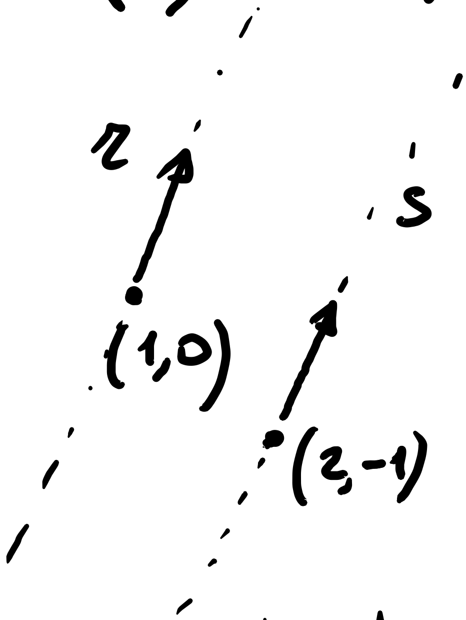
Parallelismo e ortogonalità fra rette.

Siano date due rette di rispettivi numeri direttori

$$(l_1, \dots, l_n) \text{ e } (l_1', \dots, l_n')$$

Il <u>parallelismo</u> e <u>l'ortogonalità</u> fra le due rette si riduce al parallelismo e all'ortogonalità fra i vettori $(l_1, \dots, l_n)$ e $(l_1', \dots, l_n')$.

Es. $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$



$r \parallel s$)

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$(1,2)$ è multiplo di $(3,6)$

Es.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

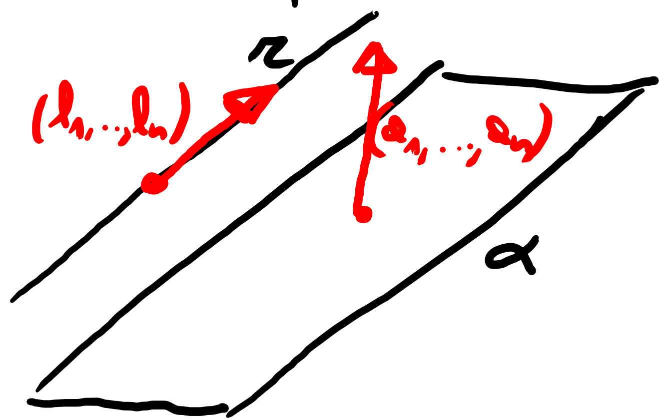
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(1,2) \perp (-2,1)$$

$$(1,2) \cdot (-2,1) = -2+2=0$$

Parallelismo tra retta e iperpiano

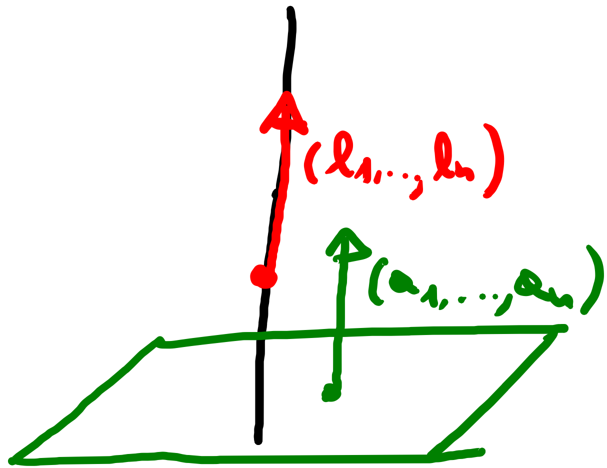
$\mathbb{R}^3$



$$(l_1, \dots, l_n) \perp (a_1, \dots, a_n)$$

$$(l_1, \dots, l_n) \cdot (a_1, \dots, a_n) = 0$$

Ortogonalità fra una retta e un iperpiano.



$$(l_1, \dots, l_n) = \lambda (a_1, \dots, a_n)$$

Esempio in $\mathbb{R}^3$:

$$r: \begin{cases} x+y-2z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

num. dir. $(-1,-1,1)$

$$\alpha: 3x+y-z=0$$

$(3,1,-1)$

$$(-1,-1,1)\cdot(3,1,-1) = -3-1-1=-5\neq 0$$

r non è parallela ad α

$$r\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}=2 \Rightarrow r \text{ non è ort. ad } \alpha$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+y = 2+2t \\ y = 1-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2-2t \\ 0 & 1 & 1-t \end{array}\right)$$

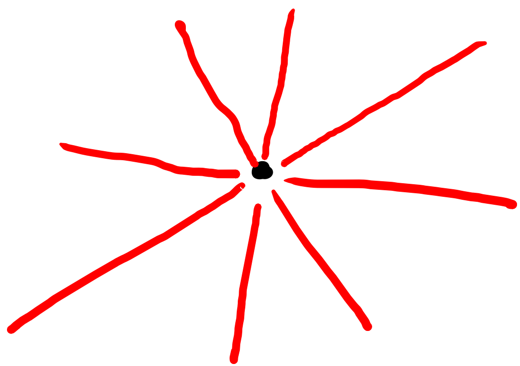
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1-t \\ 0 & 1 & 1-t \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

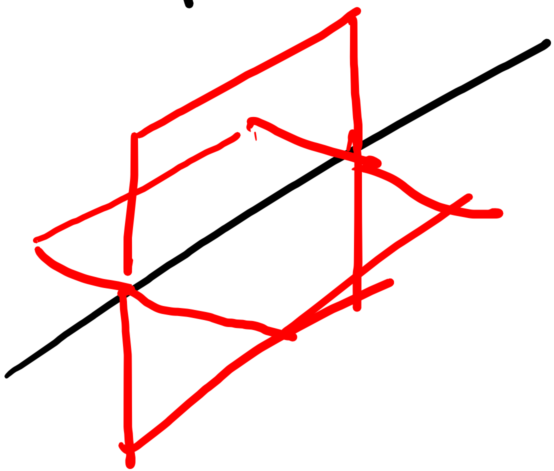
Fascio di iperpiani.

$\mathbb{R}^2$: fascio di iperpiani (rette) passanti per un punto



$\mathbb{R}^3$: fascio di iperpiani in $\mathbb{R}^3$.

Insieme di tutti i piani passanti per una retta data



Fascio di iperpiani := l'insieme di tutti gli iperpiani dello spazio affine di dimensione n che contengono un sottospazio affine di dimensione $n-2$ fissato.

Come rappresentare un fascio di iperpiani?

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c = 0$$

$$a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + c' = 0$$

$$\boxed{\alpha(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c) + \beta(a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + c') = 0}$$

Se $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ questa è l'eq. di un iperpiano (a patto di non avere l'eq. $0=0$).

Supponiamo che i due iperpiani di equazioni

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c = 0 \quad \text{e}$$

$$a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + c' = 0$$

P

contengono un sottospazio affine di dimensione $n-2$.

Allora l'iperpiano di equazione

$$\boxed{\alpha(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c) + \beta(a_1'x_1 + \ldots + a_n'x_n + c') = 0}$$

contiene anch'esso il sottospazio affine $n-2$ dimensionale.

$$\alpha(a_1x_1+\dots+a_nx_n+c)+\beta(a_1'x_1+\dots+a_n'x_n+c')=0$$

$$(\alpha,\beta)\xrightarrow{k\neq 0}(k\alpha,k\beta)$$

$$k\alpha(a_1x_1+\dots+a_nx_n+c)+k\beta(a_1'x_1+\dots+a_n'x_n+c')=0$$

Osserviamo dunque che l'iperpiano del fascio associato alla coppia (α,β), $(k\alpha,k\beta)$ $(k\neq 0)$ è lo stesso.

$$\boxed{\begin{array}{l}(\alpha,\beta) \text{ è equivalente alla coppia} \\ (k\alpha, k\beta) \text{ per ogni } k \neq 0.\end{array}}$$

Tutto questo porta a suddividere $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ in classi di equivalenza rispetto alla relazione di equivalenza vista sopra.

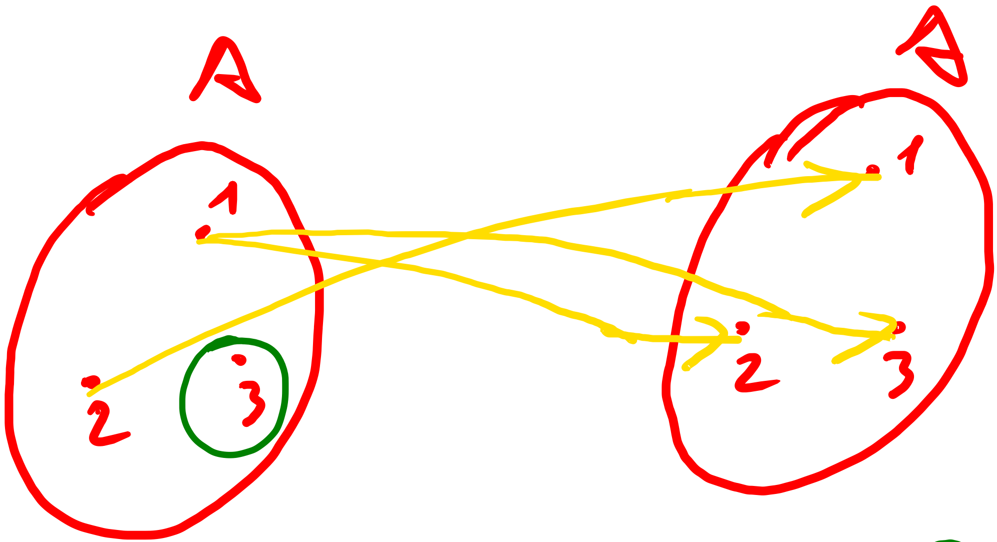
Relazioni di equivalenza

Una relazione binaria sull'insieme A è semplicemente un sottoinsieme di $A \times A$.

$$A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

A

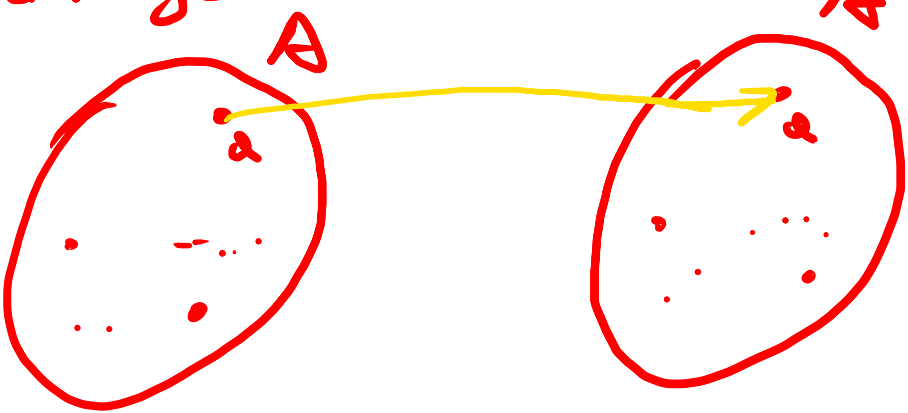
$$R \subseteq A \times A$$



$$R = \{(1,2), (2,1), (1,3)\} \subseteq A \times A$$

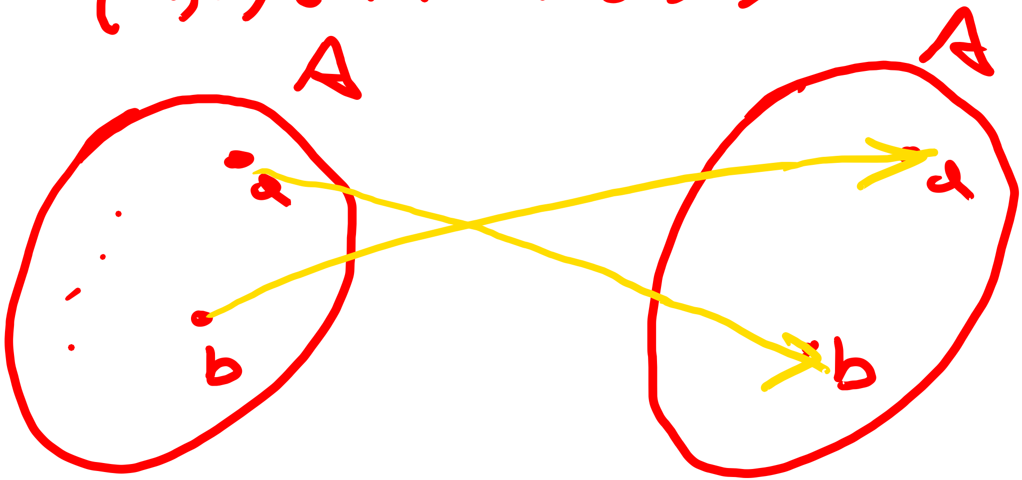
Una relazione di equivalenza su A è una relazione R su A che ha queste tre proprietà:

1) R è riflessiva: tutte le coppie (a,a) appartengono a R.



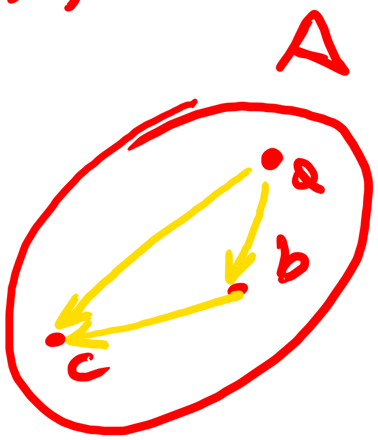
2) R è simmetrica:

$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$



3) R é transitiva:

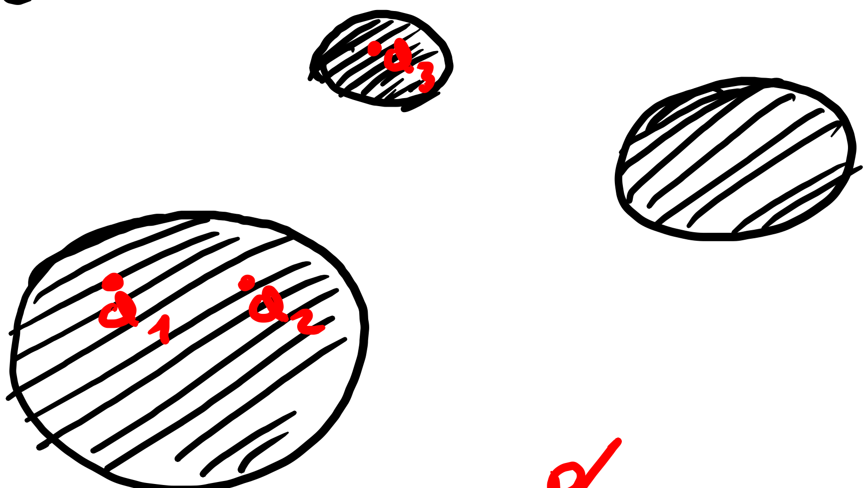
$(a,b) \in R$ e $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$



1) $a = a$

2) $a = b \Longrightarrow b = a$

3) $a = b$ e $b = c \Longrightarrow a = c$



$a_1 R a_2$ $\quad$ $a_1 \cancel{R} a_3$

Tutte le volte che si ha una relazione di equivalenza R su di un insieme A, l'insieme A può essere suddiviso in "classi di equivalenza".

Una classe di equivalenza è l'insieme dei punti che sono in relazione con un punto $\bar{x}$ fissato di A.

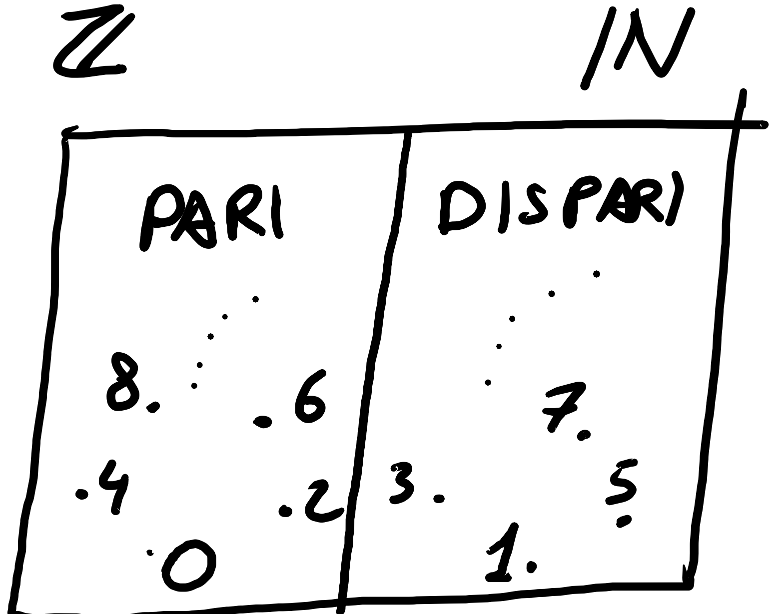
Esempio: $A = \mathbb{N}$

$nRm \iff \underset{\underset{\mathbb{Z}}{\cup}}{n-m}$ è pari

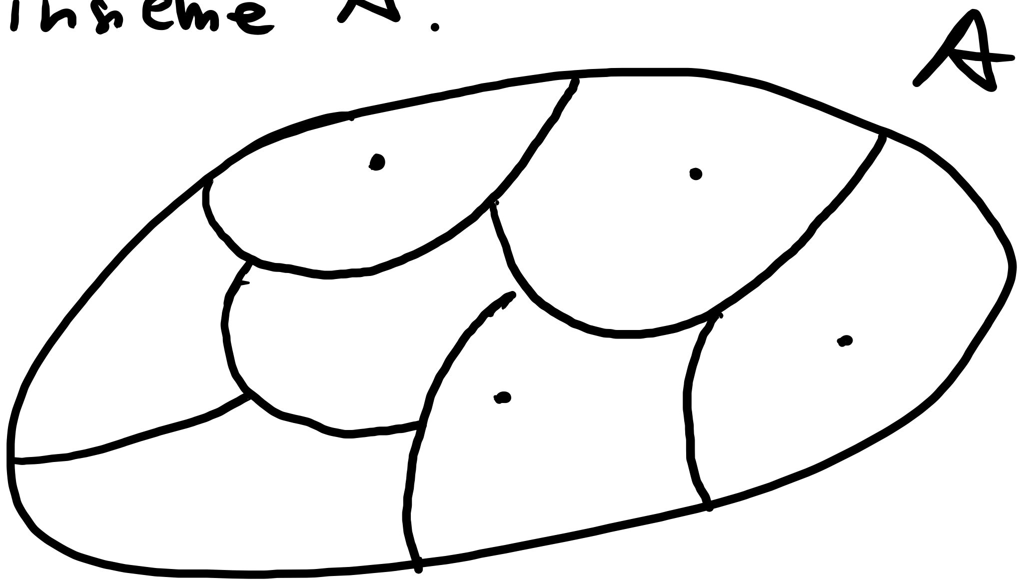
$1 R 7$

$5 R 3$

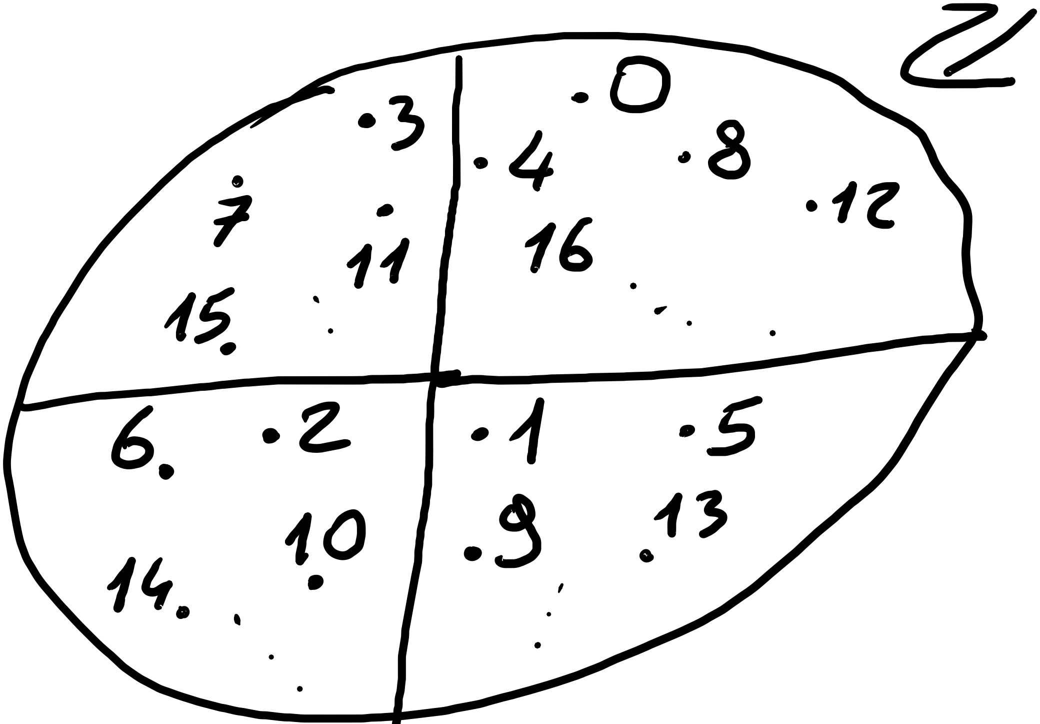
$5 \not R 8$



Le classi di equivalenza costituiscono una PARTIZIONE dell'insieme A.

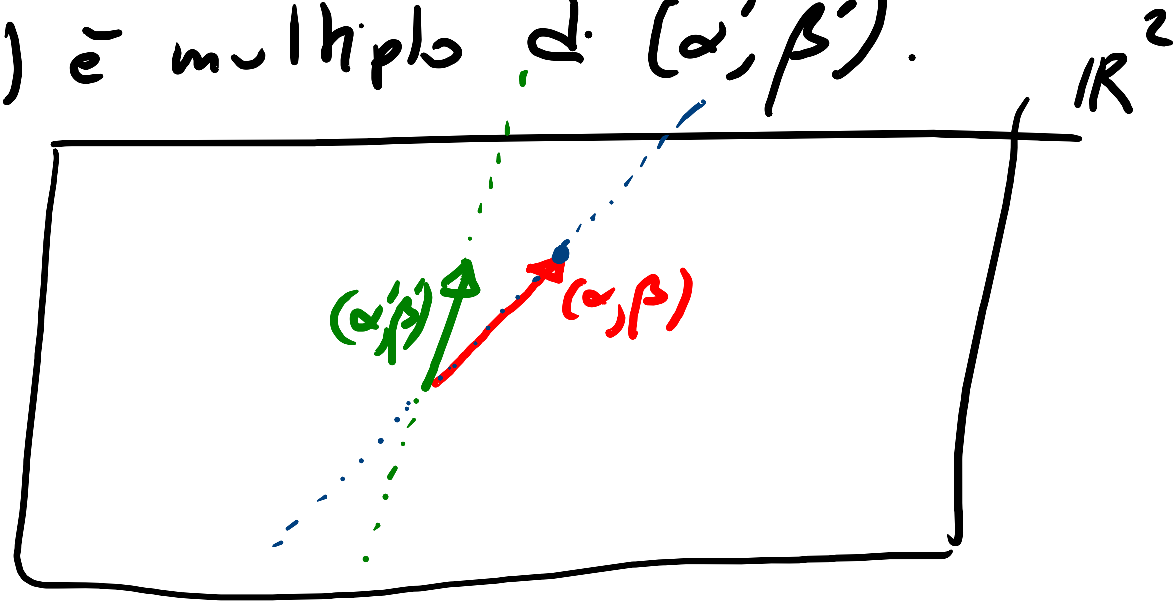


$A = \mathbb{Z}$



$n R m$ se $n - m$ è divisibile per 4.

Consideriamo la relazione di equivalenza su $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definita ponendo $(\alpha,\beta) \, R \, (\alpha',\beta')$ se (α,β) è multiplo di (α',β').



Le classi di equivalenza rispetto a R saranno le rette per $(0,0)$ (a parte il punto $(0,0)$).

Esercizio: Trovare, nel piano $\mathbb{R}^2$, le rette passanti per il punto $(1,2)$ che sono rispettivamente parallela e ortogonale alla retta $\bar{r}$ di equazione $x+y=1$.

Consideriamo due rette distinte passanti per il punto $(1,2)$:

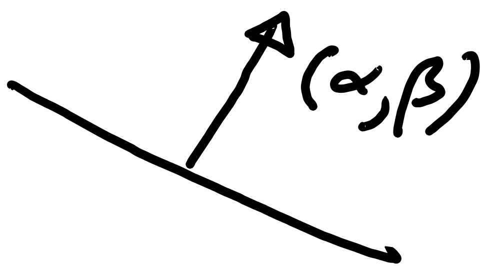
$$r_1: \ x=1 \iff x-1=0$$

$$r_2: \ y=2 \iff y-2=0$$

Scriviamo l'equazione del fascio di rette per il punto $(1,2)$:

$$\alpha(x-1)+\beta(y-2)=0$$

$$\alpha x+\beta y+(-\alpha-2\beta)=0$$



Vogliamo che $\bar{r}: x+y-1=0$ sia parallela alla retta

$$\boxed{\alpha x+\beta y+(-\alpha-2\beta)=0}$$

Troviamo i numeri direttori di $\bar{r}$:

$$\begin{cases} x=-t+1 \\ y=t \end{cases}$$

num. dir. $(-1,1)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quindi vogliamo che

$(\alpha, \beta) \cdot (-1, 1) = 0$

cioè $-\alpha + \beta = 0$

cioè $\alpha = \beta$.

$\alpha(x-1) + \alpha(y-2) = 0$

Prendiamo $\alpha = 1$

$(x-1) + (y-2) = 0$

$\boxed{x + y - 3 = 0}$

$$x + y = 1$$

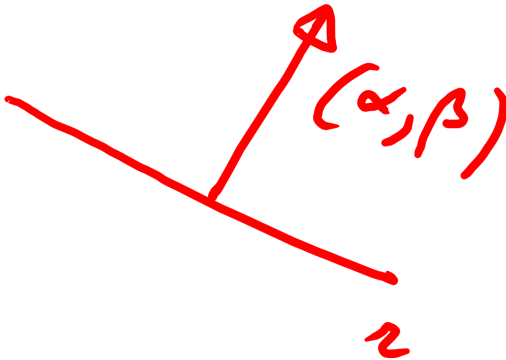
$$x + y = \boxed{k}$$

$$1 + 2 = k$$

$$x + y = 3$$

$$x + y - 3 = 0$$

$$\alpha x + \beta y + (-\alpha - 2\beta) = 0$$



$$-\beta x + \beta y + (\beta - 2\beta) = 0$$

$$-\beta x + \beta y - \beta = 0$$

$$\boxed{x - y + 1 = 0}$$

$$\bar{r} \perp r \iff (\alpha, \beta) \parallel (-1, 1)$$

$$r\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \iff \det\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha + \beta = 0$$

$$\iff \alpha = -\beta$$

Esercizio (in $\mathbb{R}^3$). Trovare il piano π passante per la retta r di equazione

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

parallela

e ortogonale al piano di equazione $2x-z=2$.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\begin{cases} x+y=1-t \\ x-y=t \\ z=t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{\begin{aligned} x+y &= 1-t \\ x-y &= t \end{aligned}} \\ z = t \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & t \end{array}\right) \downarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-t \\ 0 & -2 & 2t-1 \end{array}\right) \downarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1-t \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-t \end{array}\right) \downarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}-t \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}-t \\ z = t \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

num. dir.:

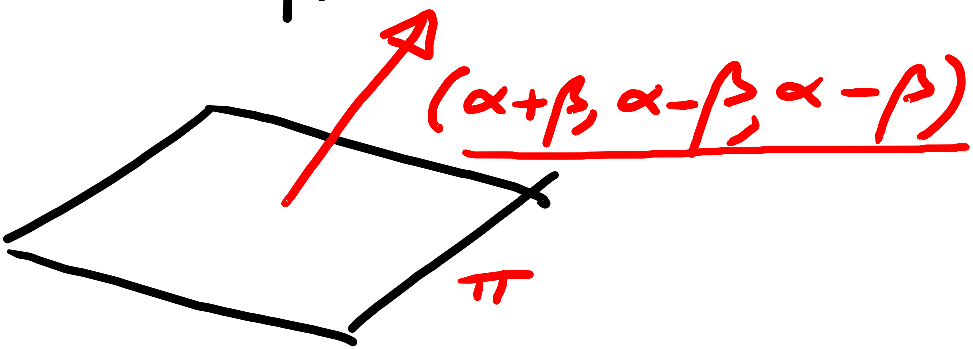
$$\boxed{(0, -1, 1)}$$

L'equazione del fascio per $\bar{a}$ è

$$\boxed{\alpha(x+y+z-1)+\beta(x-y-z)=0}$$

cioè

$$(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)y+(\alpha-\beta)z-\alpha=0$$



Affinché i due piani siano paralleli occorre che

$$(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta) = \lambda(2, 0, -1)$$

$$r\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta & \alpha-\beta \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2(\beta-\alpha) = 0$$

$$\alpha = \beta$$

$$\boxed{(\alpha,\beta) = (0,0)}$$

$$-(\alpha+\beta)-2(\alpha-\beta) = 0$$

$$-\alpha-\beta-2\alpha+2\beta = 0$$

$$\beta = 3\alpha$$

Affinché i due piani siano fra loro ortogonali occorre che

$$(\alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta)\cdot(2,0,-1)=0$$

$$2(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)=0$$

$$2\alpha+2\beta-\alpha+\beta=0$$

$$\alpha+3\beta=0$$

$$\boxed{\alpha=-3\beta}$$

$$-3\beta(x+y+z-1)+\beta(x-y-z)=0$$

$$3(x+y+z-1)-(x-y-z)=0$$

$$2x+4y+4z-3=0$$

Eq. del piano del fascio ortogonale al piano dato.

$\bar{r}: \quad y = x$

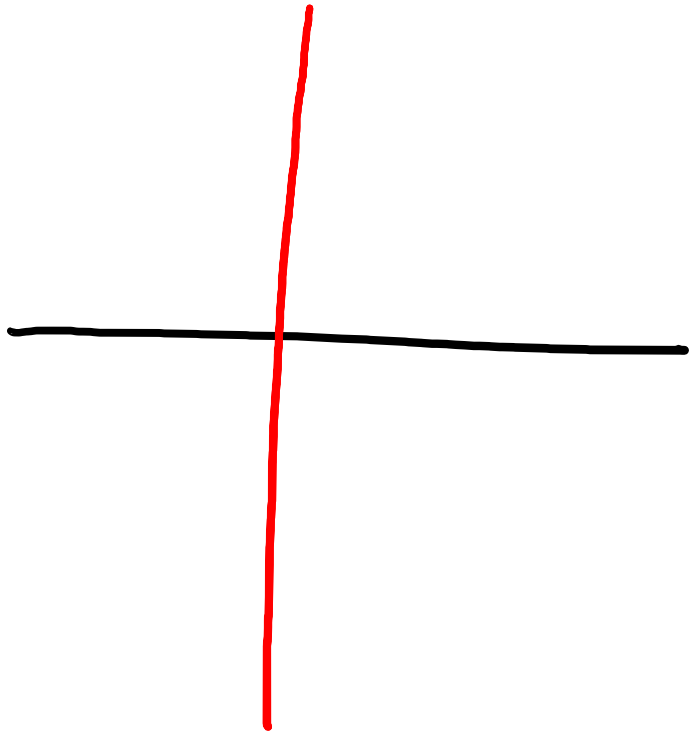
Cercare la retta ortogonale a $\bar{r}$

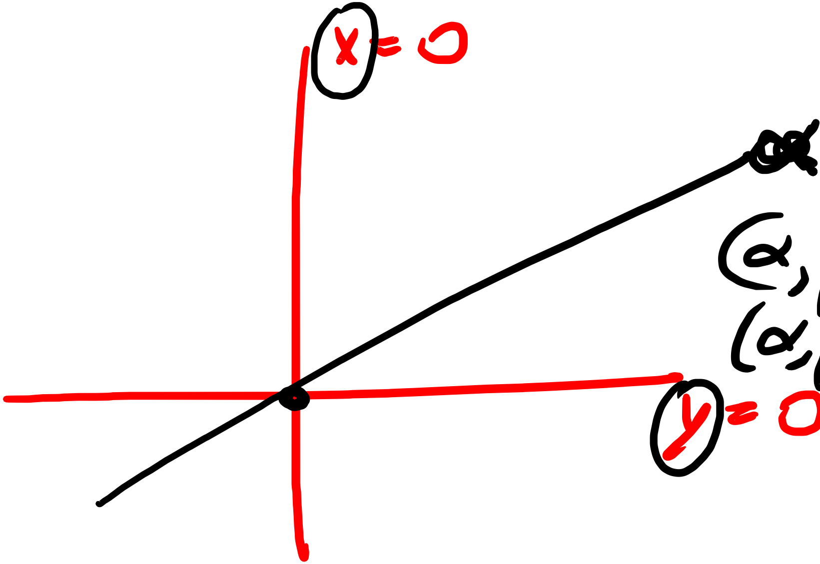
passante per $(1,2)$.

$x - y = 0$ $\qquad\qquad m = 1$

$-\frac{1}{m} = -1$

$(x,y) = (1,2) + t(1,-1)$





$$\alpha(x) + \beta y = 0$$

$$(\alpha, \beta) = (1, 0)$$

$$(\alpha, \beta) = (0, 1)$$