Sia $\mathbb{P}^1$ una retta proiettiva. Sia $\mathcal{G}$ un fissato riferimento proiettivo su di essa. Siano poi

$$A_0 \equiv_{\mathcal{G}} \overset{w_0 =}{(1,3)} \quad A_1 \equiv_{\mathcal{G}} \overset{w_1 =}{(2,7)}, \quad U \equiv_{\mathcal{G}} \overset{u =}{(2,9)}$$

a) Si verifichi che $\overline{\mathcal{G}} = (A_0, A_1, U)$ è un riferimento proiettivo

b) Si trovi una base $\overline{\mathcal{B}}$ normalizzata rispetto ad $\bar{g}$

c) Data $P \equiv_g (2,3)$, se ne trovino le coordinate rispetto ad $\bar{g}$.

---

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓

b) Cerco α, β tali che

$\alpha w_1 + \beta w_2 = u$

$$\alpha(1,3)+\beta(2,7)=(2,9)$$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta=2 \\ 3\alpha+7\beta=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha+2\beta=2 \\ \beta=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha=2-6=-4 \\ \beta=3 \end{cases}$$

$$\mathcal{B}=(v_0,v_1)=\big((-4,-12),(6,21)\big)$$

$$v_0 = \alpha w_0 = -4(1,3)$$

$$v_1 = \beta w_1 = 3(2,7)$$

$P \equiv_{\mathcal{G}} (2,3)$ $\mathcal{S} =$

Cerca x_0, x_1 tali che

$$x_0 \cdot v_0 + x_1 v_1 = v$$

$$x_0(-4,-12) + x_1(6,21) = (2,3)$$

$$\begin{cases} -4x_0 + 6x_1 = 2 \\ -12x_0 + 21x_1 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_0 = 2+6 = 8 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x_0 + 6x_1 = 2 \\ 3x_1 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = -2 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

$P \equiv_{\mathcal{G}} (-2,-1)$

Data la retta pr. $\mathcal{P}$ con rif. $\mathcal{G}$;
data la retta pr. $\mathcal{P}'$ con rif $\mathcal{G}'$,
sia $\mathcal{G} = (A_0, A_1, U)$ con
$A_0 \equiv_{\mathcal{G}} (1,3), A_1 \equiv_{\mathcal{G}} (2,7), U \equiv_{\mathcal{G}} (2,9)$)
sia poi $\mathcal{G}' = (A_0', A_1', U')$ con
$A_0' \equiv_{\mathcal{G}'} (7,3), A_1' \equiv_{\mathcal{G}'} (5,2), U' \equiv_{\mathcal{G}'} (4,2)$

a) Si verifichi che $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ sono riferimenti proiettivi

b) Si scriva, rispetto ad $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{G}'$ la matrice M che rappresenta la proiettività $\omega: \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ per cui

$$\omega(A_0) = A_0'$$
$$\omega(A_1) = A_1'$$
$$\omega(U) = U'$$

a) $\bar{g}$ già fatto

$\bar{g}'$: $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓

Trovo una base $\bar{B}'$ normalizzata rispetto ad $\bar{g}'$

$\alpha(7,3) + \beta(5,2) = (4,2)$

$\begin{cases} 7\alpha + 5\beta = 4 \\ 3\alpha + 2\beta = 2 \end{cases}$ $\quad II \leftarrow II - \frac{3}{7} I$

$2 - \frac{12}{7}$

$\begin{cases} 7\alpha + 5\beta = 4 \\ -\frac{1}{7}\beta = \frac{2}{7} \end{cases}$ $\quad 2 - \frac{15}{7} = \frac{14-15}{7} = -\frac{1}{7}$

$\begin{cases} 7\alpha = 4 + 10 = 14 \\ \beta = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} \alpha = +2 \\ \beta = -2 \end{cases}$

$v_0' = (14, 6)$ $v_1' = (-10, -4)$

$\overline{\mathcal{B}}' = ((14, 6), (-10, -4))$

$\overline{\mathcal{B}} = ((-4, -12), (6, 21))$

Trovo la matrice M che rappresenta la tr. lin. che manda $\overline{\mathcal{B}}$ in $\overline{\mathcal{B}}'$,

$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$\overline{M} = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -12 & 21 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$X^{-1} = \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 14 & -10 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 & -6 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 174 & -44 \\ 78 & -20 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix}$$

$$w : \lambda \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 87 & -22 \\ 39 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$