2 problemi nello sp. affine $\mathbb{A}^3$, risp. a un fissato rif.

---

1) Data la retta $r: \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$

dato il punto $P \equiv (1, 1, 1)$, si trovi il piano π passante per r e P.

Generico piano per r

$\alpha(x-y+2z-1)+\beta(x+3y+4)=0$

Impongo il passaggio per P

Pongo $k=\frac{\beta}{\alpha}$

$x-y+2z-1+kx+3ky+4k=0$

$1-1+2-1+k+3k+4k=0$

$1+8k=0 \quad k=-\frac{1}{8}$

$$x - y + 2z - 1 - \frac{1}{8}(x + 3y + 4) = 0$$

(o, equivalentemente)

$$8(x - y + 2z - 1) - (x + 3y + 4) = 0$$

$$7x - 11y + 16z - 12 = 0$$

2) Date le rette $r: \begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x+3y+4=0 \end{cases}$

$s: \begin{cases} x = 5\alpha \\ y = 2\alpha + 1 \\ z = \alpha + 3 \end{cases}$

si trovi il piano π' passante per r e $\parallel s$.

Trova i coeff. dir. di s: $(l, m, n) \sim (5, 2, 1)$

Generico piano per r_1

$$\alpha(x-y+2z-1)+\beta(x+3y+4)=0$$

Impongo il parallelismo con r_1

Pongo $k=\frac{\beta}{\alpha}$

$$x-y+2z-1+k(x+3y+4)=0$$

$$(1+k)x+(-1+3k)y+2z+(-1+4k)=0$$

$a=\quad b=\quad c=$

$$al + bm + cn = 0$$

$$(1+k)5 + (-1+3k)2 + 2\cdot 1 = 0$$

$$5 + 11k = 0$$

$$k = -\frac{5}{11}$$

$$x - y + 2z - 1 - \frac{5}{11}(x + 3y + 4) = 0$$

$$11(x - y + 2z - 1) - 5(x + 3y + 4) = 0$$

$$\Pi' : 6x - 26y + 22z - 31 = 0$$

Passo all'ampliamento pro.

1) $r : \begin{cases} -X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3 = 0 \\ 4X_0 + X_1 + 3X_2 = 0 \end{cases}$

$P \equiv (1, 1, 1, 1)$

Generico piano per r !

$\alpha(-X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3) + \beta(4X_0 + X_1 + 3X_2) = 0$

Pongo $k = \frac{\beta}{\alpha}$

$-X_0 + X_1 - X_2 + 2X_3 + k(4X_0 + X_1 + 3X_2) = 0$

Impongo il passaggio per P

$$-1+1-1+2+k(4+1+3)=0$$

$$1+8k=0 \qquad k=-\frac{1}{8}$$

.... stesso risultato

---

2) $r_1 \begin{cases} -x_0+x_1-x_2+2x_3=0 \\ 4x_0+x_1+3x_2=0 \end{cases}$

$s_1 \begin{cases} \dfrac{x_1}{x_0}=5\alpha \\ x_2=2\alpha+1 \\ \dfrac{x_3}{x_0}=\alpha+3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=5\alpha \\ x_2=2\alpha+x_0 \\ x_3=\alpha+3x_0 \end{cases}$

Trovo il punto improprio S_∞ di s : $s \cap \pi_\infty$

$$s \begin{cases} X_1 = 5\alpha \\ X_2 = 2\alpha + X_0 \\ X_3 = \alpha + 3X_0 \end{cases} \qquad \pi_\infty \; X_0 = 0$$

$$\begin{cases} X_1 = 5\alpha \\ X_2 = 2\alpha \\ X_3 = \alpha \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

$$S_\infty \equiv (0, 5, 2, 1)$$

Generico piano per s,

$$-x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 + k(4x_0 + x_1 + 3x_2) = 0$$

$$(0, 5, 2, 1)$$

$$-0 + 5 - 2 + 2 \cdot 1 + k(4 \cdot 0 + 5 + 3 \cdot 2) = 0$$

$$5 + k(11) = 0$$

$$k = -\frac{5}{11}$$

Sia $[f]$ rappresentata da un suo discriminante $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}$

$$W[f]: \quad A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $P \equiv (\overline{x}_0, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_n)$ $\quad P \in W[f]$

allora $\quad A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix}$

Quali punti $Q \equiv (y_0, y_1, \dots, y_n)$ sono coniugati a P? So

Quelli per cui

$$(y_0\, y_1 \dots y_n) \cdot \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}} = 0$$

$$\parallel$$

$$(y_0\, y_1 \dots y_n) \cdot \begin{pmatrix} a \\ \vdots \\ d \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (y_0, \dots, y_n)$$

Sia invece $P \notin W[f]$, allora

$$A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X_0} \\ \vdots \\ \overline{X_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allora Q è coniugato a P

$$\iff (Y_0 \cdots Y_n)\, A \begin{pmatrix} \overline{X_0} \\ \vdots \\ \overline{X_n} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{un iperpiano}$$

$$(Y_0 \cdots Y_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \iff \alpha_0 Y_0 + \cdots + \alpha_n Y_n = 0$$