$$3x_0^2 + 2x_0x_3 + x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 + 6x_3^2 = 0$$

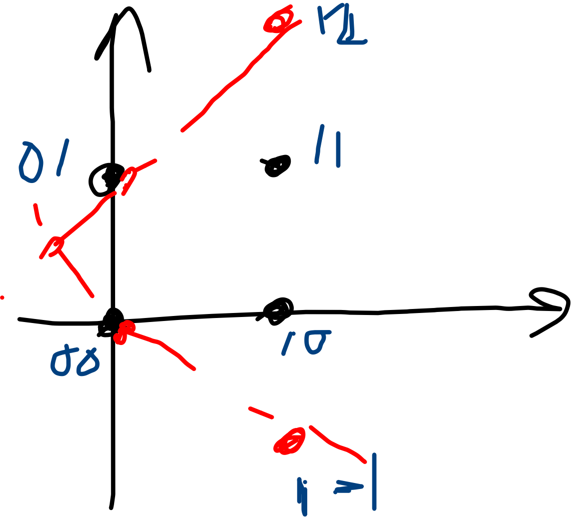
$$\Pi: \quad 4x_0 + x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11 \\ 1 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 - 11x_3 = 0 \\ x_0 + 4x_1 - 2x_1 + 6x_3 = 0 \\ x - 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$(110, -17, 51, 10)$$



$$(1\ 0\ 0) \longmapsto (1\ 0\ 0)$$
$$(1\ 1\ 0) \longmapsto (1\ 1\ -1)$$
$$(1\ 0\ 1) \longmapsto (1\ 0\ 1)$$
$$(1\ 1\ 1) \longmapsto (1\ 1\ 2)$$

$$\alpha(1\ 0\ 0)+\beta(1\ 1\ 0)+\gamma(1\ 0\ 1) = (1\ 1\ 1)$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

$$B = \left((-1\ 0\ 0),(1\ 1\ 0),(1\ 0\ 1)\right)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta = 1 \\ -\beta + \gamma = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 3 \end{cases}$$

$$B' = \left(\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3, 0, 3\end{pmatrix} \right) \qquad Y = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$I[f]$ con discriminante A

$P \equiv (x_0 - \dots x_n)$ $\quad Q \equiv (y_0 \dots - y_n)$ fissati

numeri fissati

Voglio trovare l'intersezione fra $I_m[f]$ e la retta PQ.

Retta PQ in forma parametrica:

generico punto $R \equiv (z_0 - \dots z_n)$

$$(z_0 - \dots z_n) = \lambda (x_0 - \dots x_n) + \mu (y_0 - \dots y_n)$$

$$(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

Eq. cartesiana di $\mathrm{Im}[f]$:

$$(T_0 \dots T_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} T_0 \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = 0$$

incognite

Interseco:

$$\left(\lambda(x_0 \dots x_n) + \mu(y_0 \dots y_n)\right) \cdot A \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\lambda(x_0 \dots x_n) \cdot A \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) + \mu(y_0 \dots y_n) \cdot A \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda(X_0 - X_n)\cdot A\cdot\lambda\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \lambda(X_0 - X_n)\cdot A\cdot\mu\begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} +$$

$$+\,\mu(Y_0 - Y_n)\cdot A\cdot\lambda\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + \mu(Y_0 - Y_n)\cdot A\cdot\mu\begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2(X_0 - X_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} + 2\lambda\mu(X_0 - X_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} + \mu^2(Y_0 - Y_n)\cdot A\cdot\begin{pmatrix} Y_0 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$$

$*$

Sia $P \in \mathrm{Im}[f]$. Come sono i punti Q tali che la retta PQ sia tangente?

$$\lambda^2 (X_0 - X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ | \\ X_n \end{pmatrix} + 2\lambda\mu (X_0 - X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ | \\ Y_n \end{pmatrix} + \mu^2 (Y_0 - Y_n) \cdot A \begin{pmatrix} Y_0 \\ | \\ Y_n \end{pmatrix} = 0$$

$= 0$

$$\mu \left(2\lambda (X_0 - X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ | \\ Y_n \end{pmatrix} + \mu (Y_0 - Y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ | \\ Y_n \end{pmatrix} \right) = 0$$

dice che $P \in \Gamma$

Tangenza di tipo (i): la retta PQ NON è contenuta in Im[f], Q $\notin$ Im[f]

Punico punto d'intersez.:

$$(Y_0 - Y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ 1 \\ Y_n \end{pmatrix} \neq 0$$

allora un secondo punto d'intersez. fra PQ e Im[f] è dato da

$$\lambda (X_0 - X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ 1 \\ Y_n \end{pmatrix} = -\mu (Y_0 - Y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} Y_0 \\ 1 \\ Y_n \end{pmatrix}$$

da cui

$$\frac{\mu}{\lambda} = -2\,\frac{(x_0 - x_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ y_n \end{pmatrix}}{(y_0 - y_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ y_n \end{pmatrix}}$$

Questo secondo punto coincide con

$$P(\text{tangenza}(i)) \iff \frac{\mu}{\lambda} = 0 \iff$$

$$\iff (x_0 - x_n)\cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

Tangenza (ii): la retta PQ è contenuta in $Im[f]$:

$$\underbrace{\lambda^2 (x_0 - x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ x_n \end{pmatrix}}_{=0\ (P \in Im[f])} + 2\lambda\mu (x_0 - x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ y_n \end{pmatrix} + \underbrace{\mu^2 (y_0 - y_n) \cdot A \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ y_n \end{pmatrix}}_{=0\ (Q \in Im[f])} = 0$$

deve essere un'identità, cioè soddisfatta per $\forall (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

Perciò tangenza (ii) $\iff (x_0 - x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ 1 \\ y_n \end{pmatrix} = 0$

Totale! la retta PQ è tangente a $\mathcal{A}[f]$ in P ((i) o (ii))

$$\Updownarrow$$

$$(x_0 \ \cdots \ x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$Q \in \tau(P)$$

imm. della conica di $\mathbb{P}^2$ data da $f|_{W^3}$

$\mathbb{P}^2$ corrispondente a un sottosp. vett. W^3

$\mathrm{Im}[f]$ f forma quadratica su V^4

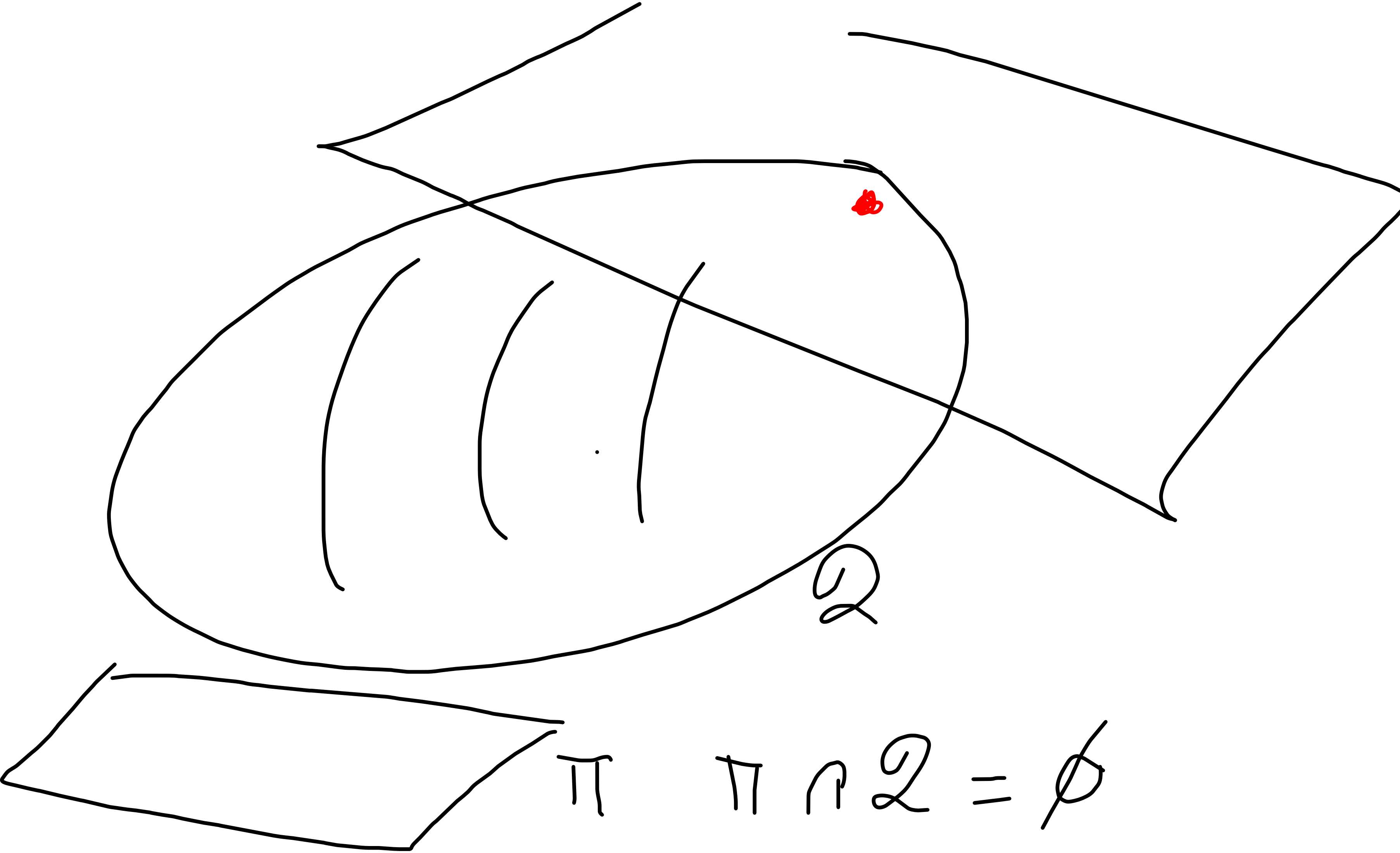
Sia $\mathcal{Q} = [f]$ una iperquadrica
$= \mathrm{Im}[f]$
non specializzata di $\mathbb{P}^n$. Sia
$P \in \mathcal{Q}$, sia $\Pi = \tau(P)$ l'iperpiano
tangente a $\mathcal{Q}$ in P. Allora
$\mathcal{Q} \cap \Pi$ è o $\{P\}$
o un'unione di rette
per P.

DIM - Se $\mathcal{Q} \cap \pi = \{P\}$ abbiamo già finito.

Sia invece $Q \neq P$, $Q \in \mathcal{Q} \cap \pi$.

$$\lambda^2 \underbrace{(x_0 - x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ perché } P \in \mathcal{Q}} + 2\lambda\mu \underbrace{(x_0 - x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ perché } Q \in \pi = \tau(P)} + \mu^2 \underbrace{(y_0 - y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=0 \text{ perché } Q \in \mathcal{Q}} = 0$$

Perciò $*$ si riduce a un'identità, cioè tutti i punti con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ forniscono soluzioni, da cui ottengo che TUTTA la retta PQ (ovviamente contenuta in Π) è contenuta in $\mathcal{Q}$, perciò in $\mathcal{Q} \cap \Pi$.



$$\pi \cap \Omega = \emptyset$$