Prop - $[f]$, $[g]$ di discrimin. A, B risp.

$[f]$ proiett. equivalente a $[g]$

$\Big\Updownarrow$

$\exists\, a \in \mathbb{K}-\{0\}$ t.c. A congruente ad B

Richiamo la def. di congruenza

A congr. a B $\overset{def}{\iff} \exists E \in GL_n(K)$ t.c.

$$A = E^T \cdot B \cdot E$$

PROP - A congr. a B

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

$\exists$ forma bil. simm. $\varphi : V \times V \to \mathbb{K}$

$\exists$ basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ di V

tali che A rappresenta φ rispetto a $\mathcal{B}$

B " " " " $\mathcal{B}'$

$$\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

questa eq. matriciale può rappresentare un cambiamento di riferimento di $\mathbb{P}$ (e un cambiamento di base di V) ma può invece rappresentare una omografia di P rispetto ad un fissato riferimento (e un automorfismo di V rispetto a una fissata base).

PROP - A congruente a B

$\Updownarrow$

$\Updownarrow$

la forma quadratica g rappresentata da B è ottenuta componendo la forma quadratica f rappresentata da A con un automorfismo di V.

Su $\mathbb{R}$

f forma quadratica

φ sua forma polare

A matrice di Gram di f e φ.

DEF - Segnatura di f, φ, A,

la coppia $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$,

dove σ_+ è la somma delle molteplicità
σ_- (alg = geom) degli autovalori
positivi di A
negativi

versione semplificata di Harriot-Cartesio

TEOR - Sia A reale simmetrica, allora σ_+ = n. di variazioni
σ_- = n. di permanenze
del polinomio caratteristico di A.

Variazioni e permanenze

dato un polinomio a coeff. reali, con termine noto $\neq 0$

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

consideriamo la sequenza dei coefficienti,

$$(a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0)$$

Se ci sono coefficienti nulli assegniamo loro un segno + o − arbitrario.

Permanenza: ogni coppia (a_i, a_{i-1}) di segno concorde

Variazione discorde

Esempio

$A \in M_5(\mathbb{R})$ simmetrica

Il suo pol. caratteristico

$$\lambda^5 - 19\lambda^4 + 5\lambda^3 + 775\lambda^2 - 1407\lambda - 4143$$

$$(1, -19, 5, 775, -1407, -4143)$$

$\sigma_+ = 3 \quad \sigma_- = 2 \quad \sigma = (3, 2)$

$$x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 4x + 9$$

$$(1, -7, 11, 4, 9)$$

n. var. = 2 # rad. pos. : 0, 2

n. perm = 2 # rad neg. : 0, 2

TEOR - $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simm.

$$A \text{ congr. a } B \iff \sigma(A) = \sigma(B)$$

TEOR $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche

$$A \text{ congr. a } B \iff r(A) = r(B)$$

COR In uno sp. pr. complesso

$[f]$ proiett. equiv. a $[g]$

$$\Updownarrow$$

$$r(A) = r(B$$

COR - In uno sp. pr. reale, $\sigma(f) = (p, q)$, $\sigma(g) = (r, s)$

$[f]$ proiett. equiv. a $[g]$

$\Updownarrow$

o $(p = r$ e $q = s)$ o $(p = s$ e $q = r)$

Attenzione — In quello che segue dichiarerò certe proprietà di immagine e vertice delle iperquadriche considerate. Le proprietà dei vertici saranno immediate. Le proprietà delle immagini richiederebbero uno studio accurato che qui NON farò. La buona notizia è che, comunque, essendo proprietà invarianti per omografie, possono essere studiate sui "prototipi" ~~m~~ostrati qui e varranno per tutte le iperquadriche della stessa classe di equivalenza proiettiva.

PROP - $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica

A è congruente a

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \quad \ddots \quad 1}^{r} & 0 \\ 0 & \overbrace{0 \quad \ddots \quad 0}^{n-r} \end{pmatrix}$$

forma canonica per congruenza di A

dove $r = r(A)$

PROP- $A \in M_n(\mathbb{R})$ simm.

A è congruente a

forma canonica per congruenza di A

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{\sigma_+} & & 0 \\ & \overbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}^{\sigma_-} & \\ 0 & & \overbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}^{n-\sigma_+-\sigma_-} \end{pmatrix}$$

con

$\sigma(A) = (\sigma_+, \sigma_-)$

Coniche del piano complesso

$r=1$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\operatorname{Im} 1$ $X_0^2 = 0$

una retta (contata 2 volte)

W_1 $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

$r=2$ $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2+X_1^2=0$

$(X_0+iX_1)\cdot(X_0-iX_1)=0$

unione di 2 rette

W: $\begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ 0=0 \end{cases}$ un punto: il punto di interse-ziane delle 2 rette

$r=3 \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ $\quad x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$

immagine costituita da ∞ punti; non contiene rette

$W \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases} \quad \emptyset$

Coniche del piano pro. reale

$r = 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \right) \quad I_{1,1} \quad X_0^2 = 0$

una retta (contata 2 volte)

$W_1 \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

$r=2$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im: x_0^2 + x_1^2 = 0$

un solo punto

$$W_1 \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso punto

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $x_0^2 - x_1^2 = 0$

$(x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0$

unione di 2 rette

$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ -x_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto: l'intersezione delle 2 rette

$r = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$Im: \; x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\emptyset$

$\emptyset$

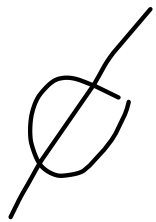
conica vuota o immaginaria

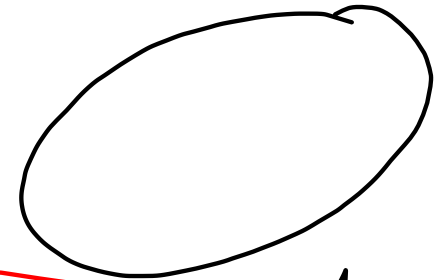
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

Im | $X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

ha ∞ punti, non contiene rette

$$W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases}$$





conica non degenere reale

Quadriche dello spazio ord. pro. compl.

$r=1$ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 = 0$

un piano (contato 2 volte)

$W:$ $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

$r = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

unione di 2 piani

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ una retta l'interse= zione dei 2 piani

$r = 3 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ Im, $X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

unione di ∞^1 rette passanti per uno stesso punto

$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$ un punto, quel punto

cono

$r=4$ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\mathrm{Im}: x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

immagine costituita da ∞ punti, non contiene piani, per ogni suo punto passano 2 rette contenute nella immagine

$W:\begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$ $\emptyset$

Quadriche della sp. pro. ord. reale

$r=1$ $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ Im: $x_0^2 = 0$

un piano (contato 2 volte)

$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

$r = 2 \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}: x_0^2 + x_1^2 = 0$

una retta

$W_1 \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

la stessa retta

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}: \; X_0^2 - X_1^2 = 0$$

$$(X_0 + X_1)(X_0 - X_1) = 0$$

unione di 2 piani

$$W_1 \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

una retta: l'intersezione dei 2 piani

$$r = 3 \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

un punto

$$W : \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso punto

cono immaginario

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$

uniane di ∞ rette generatrici passanti per un punto

$$W: \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ 0 = \alpha \end{cases}$$

un punto: quel punto!

cono reale

$$r = 4 \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{Im}: \ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$$\emptyset$$

$$V_i : \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Im: $x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$

costituita da ∞ punti,

non contiene piani

non contiene rette

quadrica ellittica

$$W, \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$ contiene ∞ punti, non contiene piani, per ogni suo punto passano 2 rette generatrici contenute nell'immagine = quadrica iperbolica

$$W_1 \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ -x_2=0 \\ -x_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$$