$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

funzioni simmetriche elementari delle radici

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (formule di Viète)

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \dots = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)\cdot(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdot \cdots \cdot(x-\alpha_n)$$

$$\begin{aligned}
p(x) = {} & \underbrace{a_n}_{=a_n} x^n \\
& + \underbrace{a_n \, (-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)}_{=a_{n-1}} x^{n-1} \\
& + \underbrace{a_n \, \big((-\alpha_1)(-\alpha_2)+(-\alpha_1)(-\alpha_3)+\cdots+(-\alpha_{n-1})(-\alpha_n)\big)}_{=a_{n-2}} x^{n-2} \\
& \quad \vdots \\
& + \underbrace{a_n \cdot (-\alpha_1)\cdot \cdots (-\alpha_n)}_{=a_0}
\end{aligned}$$

Eventuali radici razionali di un polinomio a coefficienti interi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$\in \mathbb{Z}$

Prop - Le eventuali radici razionali di $p(x)$ sono del tipo $\frac{r}{s}$ con r divisore di a_0 ed s divisore di a_n

Eventuali radici razionali di un polinomio a coefficienti interi

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$\in \mathbb{Z}$

Prop - Le eventuali radici razionali di $p(x)$ sono del tipo $\frac{r}{s}$ con r divisore di a_0 ed s divisore di a_n

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

I_n $\mathbb{Z}$ siano m ed n elementi; c'è una valutazione di

$\mathbb{R}[x]$

ogni elemento k : $\mathbb{N}$ k "intero" ≥ 0

$\mathbb{Z}$ $|k|$

$\mathbb{R}[x]$ $gr(k)$

C'è una divisione con resto: se la valut. di m è $\geq$ alla valutazione di n, allora esistono q ed r tali che $m = n \cdot q + r$, con valutazione di $r <$ valutazione di n.

Diciamo che m è divisibile per n, e che n è un divisore di m se il resto è nullo.

Ci sono divisori "obbligati" di m?
banali

Sì: gli elementi "unitari" (cioè quelli invertibili) e i prodotti di m con gli elementi unitari

In $\mathbb{N}$: 1, $1 \cdot m$

In $\mathbb{Z}$: ± 1, $\pm 1 \cdot m$

In $\mathbb{R}[x]$: a costante $\neq 0$, $a \cdot m$

esempio
fra i divisori di x ci sono $3, \frac{1}{3}, 3x, \frac{1}{3}x$

Diciamo che m è divisibile per n, e che n è un divisore di m se il resto è nullo.

Ci sono divisori "obbligati" di m?
banali

Sì: gli elementi "unitari" (cioè quelli invertibili) e i prodotti di m con gli elementi unitari

In $\mathbb{N}$: 1, $1 \cdot m$

In $\mathbb{Z}$: ± 1, $\pm 1 \cdot m$

In $\mathbb{R}[x]$: a costante $\neq 0$, $a \cdot m$

esempio
fra i divisori di x ci sono 3, $\frac{1}{3}$, $3x$, $\frac{1}{3}x$

m viene detto primo $\mathbb{N}$ / $\mathbb{Z}$ / irriducibile $\mathbb{R}[x]$ se ammette solo i divisori banali.

TEOR – Ogni $m \neq 0$ si scrive in modo unico come

$$m = a \cdot m_1 \cdot \ldots \cdot m_p$$

dove a è elemento unitario e $m_1, \ldots, m_p$ sono elementi
$\begin{pmatrix} \mathbb{N} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{R}[x] \end{pmatrix}$ primi / primi positivi / irriducibili monici

coeff. del grado massimo $= 1$

Dati m e n $\in$ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$, chiamo massimo comun divisore un elemento d tale che:

1) d è divisore comune di m e di n
2) se d' è divisore comune di m e di n, allora d' è divisore di d.

$\mathbb{N}$ $\quad MCD(6,15) = 3$

$\mathbb{Z}$ $\quad MCD(6,15) = 3, -3$

$\mathbb{R}[x]$ $\quad p(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$q(x) = (x-1)^2$

$MCD(p(x), q(x)) = \underset{\neq 0}{a}(x-1)$

Metodo euclideo delle divisioni successive per trovare $d = MCD(m, n)$.

$$m = n \cdot q_1 + r_1$$
$$n = r_1 \cdot q_2 + r_2$$
$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$
$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$$
$$\vdots$$
$$r_{h-2} = r_{h-1} q_h + r_h$$
$$r_{h-1} = r_h \cdot q_{h+1}$$

$$d = r_h$$

d' divisore di m e di n

d' è divis. di $m - nq_1 = r_1$

d' è divis di $n - r_1 q_2 = r_2$

$\vdots$

d' è divisore di $r_{h-2} - r_{h-1} q_h = r_h$

$7 \cdot 17 \cdot 41$
$= 4879$

$// 357$

$2261 = 7 \cdot 17 \cdot 13$
2

2261
119

357
6

357
000

119
3

$= (x^2+x+4)(x^3-2)$

$$x^5+x^4+4x^2-2x^2-2x-8$$
$$-x^5-x^4-5x^3-x^2-4x$$
$$// \quad // \quad -x^3-3x^2-6x-8$$

$(x^2+x+4)(x^2-1)$

$$\begin{array}{l|l} x^4+x^3+5x^2+x+4 & \\ \hline x & \end{array}$$

$$x^4+x^3+5x^2+x+4$$
$$-x^4-3x^3-6x^2-8x$$
$$// \quad -2x^3-x^2-7x+4$$
$$+2x^3+6x^2+12x+16$$
$$// \quad 5x^2+5x+20$$

$$\begin{array}{|l} +x^3+3x^2+6x+8 \\ \hline x-2 \end{array}$$

$$x^3+3x^2+6x+8$$
$$-x^3-x^2-4x$$
$$// \quad 2x^2+2x+8$$
$$-2x^2-2x-8$$
$$//$$

$$\begin{array}{|l} x^2+x+4 \\ \hline x+2 \end{array}$$

Per quali valori di α questi 2 polinomi in x hanno almeno una radice comune?

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - \alpha x^2 + 2\alpha x - 15 & x^2 - \alpha x + 3 \\
\hline
-x^3 + \alpha x^2 - 3x & x \\
\hline
// \quad // \quad (2\alpha - 3)x - 15 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
x^2 - \alpha x + 3 & (2\alpha-3)x - 15 \\
\hline
&
\end{array}
$$

$$-\frac{18\alpha^2 - 9\alpha - 252}{4\alpha^2 - 12\alpha + 9} = 0 \quad \text{per} \quad \alpha = -\frac{7}{2} \lor \alpha = 4$$

$\alpha = -\frac{7}{2}$ $\quad -10x - 15 \quad$ $x = -\frac{3}{2}$

$\alpha = 4$ $\quad 5x - 15 \quad$ $x = 3$

$$
\begin{vmatrix}
1 & -\alpha & 2\alpha & -15 & 0 \\
0 & 1 & -\alpha & 2\alpha & -15 \\
1 & -\alpha & 3 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -\alpha & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -\alpha & 3
\end{vmatrix}
$$

Trovare il discriminante di $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8$

$$3f - xf' = \begin{array}{r} 3x^3 - 15x^2 + 24x - 12 \\ -3x^3 + 10x^2 - 8x \\ \hline // \quad -5x^2 + 16x - 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^2 - 10x + 8 & -5x^2 + 16x - 12 \\ \cline{2-2} -3x^2 + \frac{48}{5}x - \frac{36}{5} & -\frac{3}{5} \\ \hline // \quad -\frac{2}{5}x + \frac{4}{5} & \end{array}$$

$-\frac{2}{5}(x-2)$

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$\varphi(x) = 2f - xf' = \begin{array}{r} 2ax^2 + 2bx + 2c \\ -2ax^2 - bx \\ \hline bx + 2c \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 4ac - b^2$$

$$\begin{vmatrix} b & 2c \\ 2a & b \end{vmatrix} = b^2 - 4ac$$

Sp. affine $\mathcal{A}^3$

piano: 1 eq. in x, y, z

	inc.	compl
$\Pi_1 \left\{ ax+by+cz=d \right.$	1	1
$\Pi_2 \left\{ ex+fy+gz=h \right.$	1	2
	2	2

Sp. $\mathcal{A}^4$ piano: 2 eq. in x, y, z, t

$\Pi_1 \left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz+dt=e \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{array} \right.$

$\Pi_2 \left\{ \begin{array}{l} \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{array} \right.$

2	2
2	3
3	3
3	4
4	4