Siano $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}'$ rette proiettive; siano, rispetto a riferimenti proiettivi $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ rispettivamente, $P_0 \equiv (1,3)$, $P_1 \equiv (-2,2)$, $Q \equiv (10,6)$ punti di $\mathbb{P}$; siano $P_0' \equiv (4,19)$, $P_1' \equiv (0,1)$, $Q' \equiv (16,70)$ punti di $\mathbb{P}'$.

a) Si verifichi che $\overline{\mathcal{G}} = (P_0, P_1, Q)$ ed $\overline{\mathcal{G}}' = (P_0', P_1', Q')$ sono riferimenti proiettivi dei rispettivi spazi.

b) Si trovi la rappresentazione matriciale, rispetto ad $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$, della proiettività $\omega : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ tale che

$\omega(P_0) = P_0'$, $\omega(P_1) = P_1'$, $\omega(Q) = Q'$.

c) Dato in $\mathbb{P}$ il punto $\tilde{P} \equiv_{\mathcal{G}} (1,5)$, si trovino, rispetto ad $\mathcal{G}'$, le coordinate di $\tilde{P}' = \omega(\tilde{P})$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -2 & 10 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓ $\overline{\mathcal{G}}$ rif pro.

$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 16 \\ 19 & 1 & 70 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 16 \\ 1 & 70 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 19 & 70 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 19 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓ $\overline{\mathcal{G}}'$ rif pro.

b) Base norm. risp. a $\overline{\mathcal{G}}$: $\overline{\mathcal{B}} = \cancel{((4,12),(6,-6))}$ $((2,6),(3,-3))$

Cerco una base $\overline{\mathcal{B}}'$ normalizzata rispetto ad $\overline{\mathcal{G}}'$: cerco α, β t.c.

$\alpha(4,19) + \beta(0,1) = (16,70)$

$\overline{\mathcal{B}}' = \cancel{((4,36),(0,34))}$ $\cancel{((2,18),(0,17))}$ $((8,38),(0,-3))$

$(16,76)$ $(0,-6)$

$\begin{cases} 4\alpha + 0\cdot\beta = 16 \\ 19\alpha + 1\cdot\beta = 70 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 70 - 19\cdot 4 = \cancel{34}\ -6 \end{cases}$

$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}}}_{Y}$ $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 38 & -3 \end{pmatrix}$

$M = Y \cdot X^{-1} = \cancel{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 18 & 17 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 38 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{-24} = -\frac{1}{24} \cancel{\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -176 & -20 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -24 & -24 \\ -96 & -120 \end{pmatrix}$

$\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 78 & 10 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

$\lambda \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 78 & 10 \end{pmatrix}} \cancel{\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Verifico che questa trasformazione faccia quello che mi aspetto

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 108 \end{pmatrix}} \quad \tilde{Q}? \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix}$$

$w(P_\alpha) = P_0$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1$$

$w(P_1) = P_1$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 2$$

$w(Q) = Q$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 70 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 70 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1$$

$\dim V = 10$

$V' \quad (a_1 x_1 + \dots + a_{10} x_{10}) = 0$ forma lineare non nulla

$0 \neq \quad 1$

$\dim V' = 10 - 1 = 9$

$\mathcal{P} = (V, \mathcal{P}, \vartheta) \quad \dim \mathcal{P} = n$

$\dim V = n+1$

$V' : a_0 X_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = 0$

$\mathcal{P}' = (V', \mathcal{P}' = \mathcal{P}(V'), \vartheta' = \vartheta|_{V' - \{0\}}) \quad \dim \mathcal{P}' = n-1$

$\dim V' = n + 1 - 1 = n$

$\mathbb{A}^2$ $\quad P \equiv (5,3)$

$\mathbb{P}^2$ $\quad P \equiv (1,5,3) \sim (2,10,6) \sim (3,15,9)$

$\left(\frac{5}{1}, \frac{3}{1}\right) \quad \left(\frac{10}{2}, \frac{6}{2}\right) \quad \left(\frac{15}{3}, \frac{9}{3}\right)$

$r: \ 7x - 4y + 8 = 0 \qquad x = \frac{X_1}{X_0} \quad y = \frac{X_2}{X_0}$

$$X_0 \cdot \left(7\frac{X_1}{X_0} - 4\frac{X_2}{X_0} + 8\right) = 0$$

ampliamento proiettivo di r: $\quad 7\frac{X_1}{\cancel{X_0}}\cancel{X_0} - 4\frac{X_2}{\cancel{X_0}}\cancel{X_0} + 8X_0 = 0$

$$7X_1 - 4X_2 + 8X_0 = 0$$

$$\begin{cases} x + 5y + 1 = 0 \\ 2x + 10y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$\det = 0$

rango $= 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det \neq 0$

rango $= 2$

No sol,

$$\begin{cases} 1X_0 + X_1 + 5X_2 = 0 \\ 3X_0 + 2X_1 + 10X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(X_0, X_1, X_2) \sim \left(\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (0, 5, -1)$$