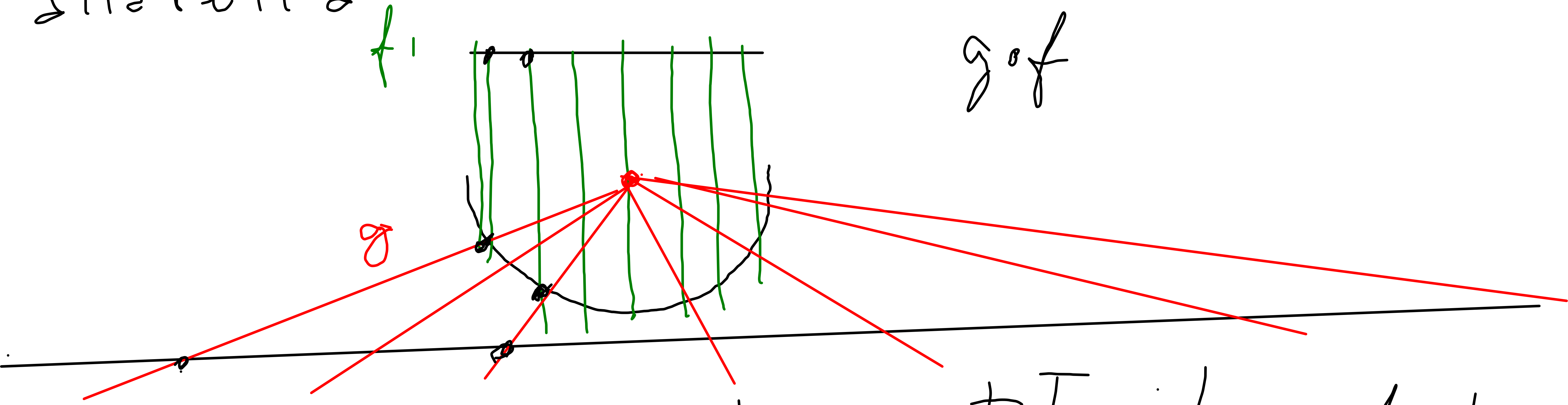
Dati insiemi A, B, dico che A è **equipotente** a B se $\exists$ biiezione $f: A \to B$

PROP - L'equipotenza è una relazione di equivalenza.

Definisco **cardinalità** ogni classe di equipotenza. La cardinalità di A viene indicata come $\#A$ oppure $|A|$

Definisco $|A| \geq |B|$ se $\exists$ una applicazione suriettiva $g: A \to B$. Definisco $|A| \leq |B|$ se $\exists$ una applicazione iniettiva $h: A \to B$

PROP Il segmento aperto $]0,1[$ è equipotente alla retta



PROP- Il segmento aperto I e il quadrato aperto Q sono equipotenti

$$f : I =]0,1[\longrightarrow Q$$

$$0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots \longmapsto \left(0.a_1 a_3 a_5 \ldots , 0.a_2 a_4 a_6 \ldots\right)$$

$$0.574 = 0.573999\ldots$$

$$0.573\overline{9}$$

PROP – Sono equipotenti l'insieme dei naturali e l'insieme dei naturali quadrati

PROP – Sono equip. l'ins. dei naturali e l'ins. dei naturali pari

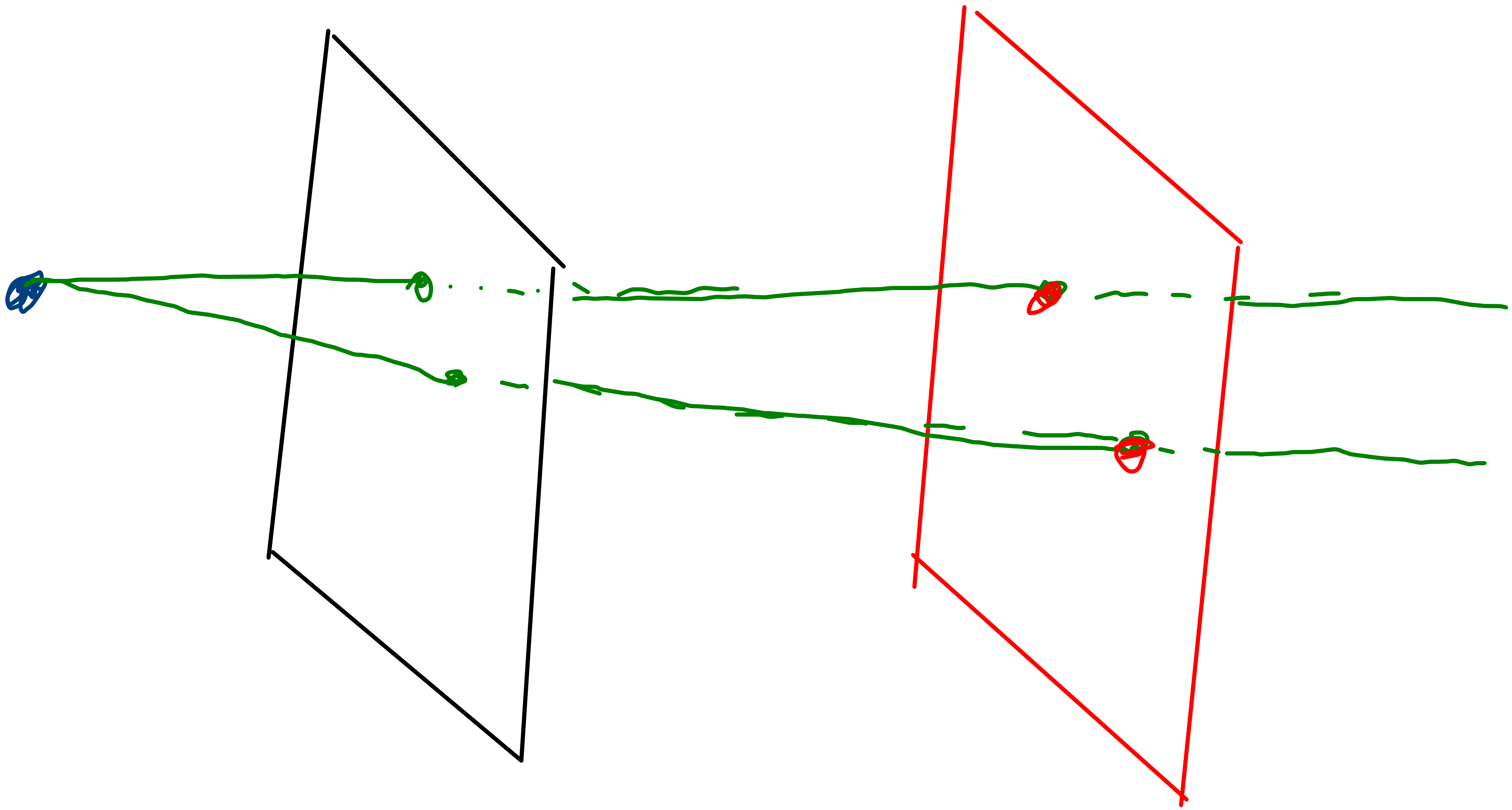
TEOR — $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

DIM — Dimostro $|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}^+|$ e $|\mathbb{N}| \ge |\mathbb{Q}^+|$

$|\mathbb{N}| \le |\mathbb{Q}^+|$: l'applicazione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ è iniettiva
$$n \mapsto \frac{n}{1}$$

$|\mathbb{N}| \ge |\mathbb{Q}^+|$: costruisco l'applicazione diagonale: $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$

1 $1/1$	3 $1/2$	6 $1/3$	10 $1/4$
2 $2/1$	5 $2/2$	9 $2/3$	
4 $3/1$	8 $3/2$		
7 $4/1$			



Sp. pr. di dim 4, risp. a un rif. pr. $\mathcal{G}$.

Iperpiano: sottospazio di dim $= 4-1 = 3$

Sarebbe "l'insieme di tutti i punti $(X_0, \dots, X_4)$ che soddisfano (per esempio) l'eq. $2X_0 - X_3 + X_4 = 0$"

Versione fighetta: iperpiano è la classe di proporzionalità della forma lineare $2X_0 - X_3 + X_4$

Iperquadrica: solo la versione fighetta!

Classe di proporz. di una forma quadratica non nulla.

Su $\mathbb{R}^3$ posso avere forme bilineari φ

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x,y,z),(x',y',z')) \longmapsto$$ funz. polinomiale nulla o omogenea di grado 1 nelle x, y, z e di grado 1 nelle x', y', z'

es (simmetrica) $5xx' + 3xy' + 3yx' - 2yz' - 2zy'$

φ si può ricostruire come $(x\ y\ z) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(x\ y\ z) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (5x+3y \quad 3x-2z \quad -2y) \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$q: V \to \mathbb{R}$ quadratica se $\exists$ bilineare (simmetrica) $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$

t.c. $\forall v \in V$ $q(v) = \varphi(v, v)$

Forma quadratica associata alla φ di prima:

$$q((x,y,z)) = (x\ y\ z) \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5x^2 + 6xy - 4yz$$

funzioni o polinomiali omogenee di grado 2 o nulle

$\mathbb{P}^2$ (x_0, x_1, x_2) in $\mathbb{R}^2$

esponenti

$$x_0^2 + 7x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \iff (x_0, x_1, x_2) = (0,0,0)$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

sono coniche entrambe a immagine vuota, ma diverse (le due forme quadratiche non sono una multipla dell'altra).

TEOR - $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$

potenza del numerabile

potenza del continuo

DIM - $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{R}|$ $\quad f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è iniettiva

$n \longmapsto n$ come reale

$|\mathbb{N}| \not\geq |\mathbb{R}|$

$|]0,1[|$

Dimostro che ogni possibile applicazione da $\mathbb{N}$ a $]0,1[$ NON È suriettiva

Sia $g : \mathbb{N} \longrightarrow]0,1[$ una applicazione

$$g: \begin{array}{lcl} 1 & \longmapsto & 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots \\ 2 & \longmapsto & 0{,}b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \ldots \\ 3 & \longmapsto & 0{,}c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \ldots \\ 4 & \longmapsto & 0{,}d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots \\ 5 & \longmapsto & 0{,}e_1 e_2 e_3 e_4 e_5 e_6 \ldots \\ \vdots & & \ddots \end{array}$$

C'è almeno un numero che non compare nella lista, cioè che non è immagine di alcun naturale:

$0{,}x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6$ dove $x_1 \neq a_1$, $x_2 \neq b_2$ $x_3 \neq c_3$ $x_4 \neq d_4$ $x_5 \neq e_5 \ldots$