Dimostro $W[f] \subseteq Im[f]$

Se $W[f] = \emptyset$ OK

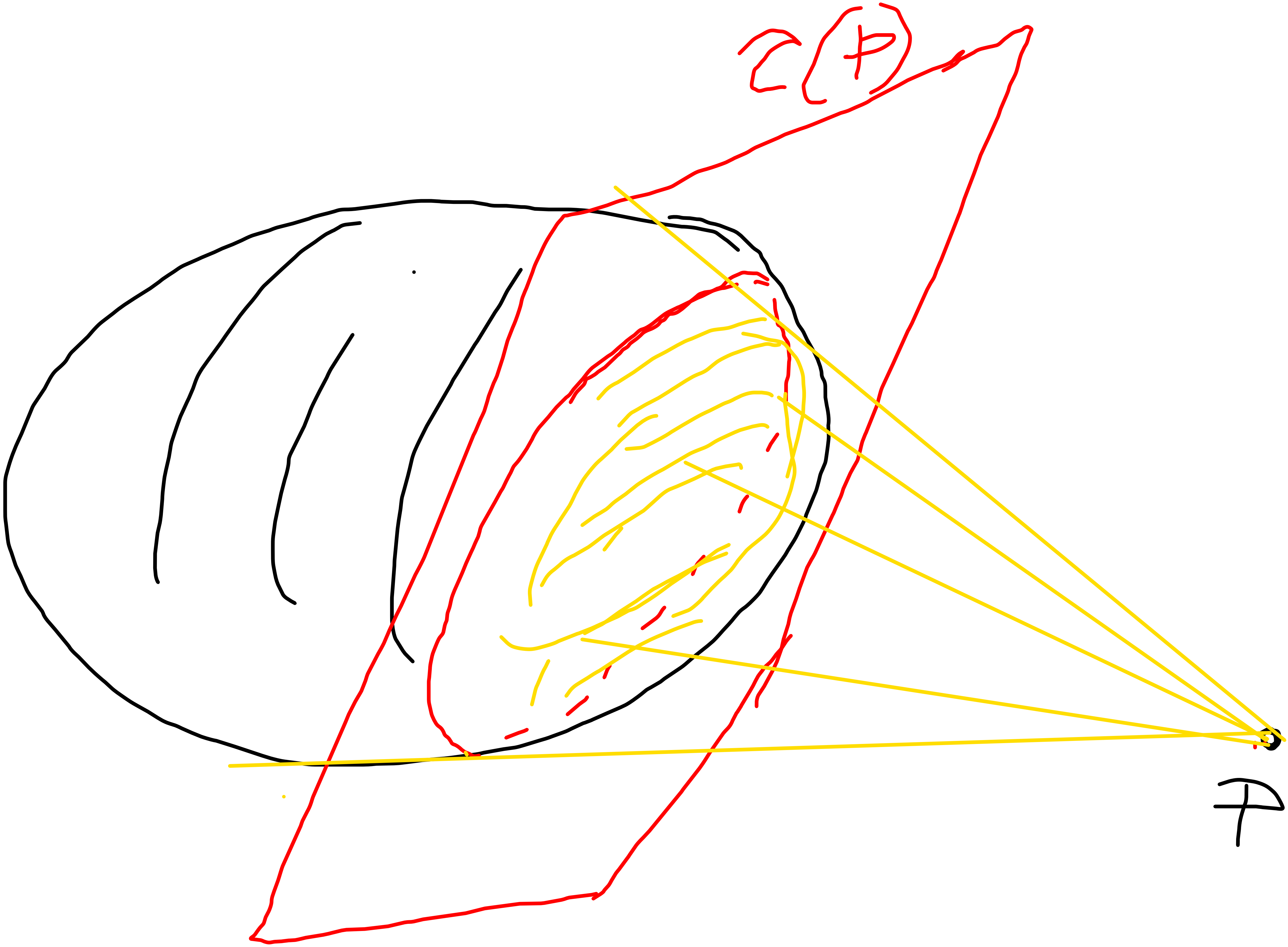
Se $\exists\, \overline{P} \equiv (\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n) \in W[f]$, allora

$$A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ma allora

$$(\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = (\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

perciò $\overline{P} \in Im[f]$



$\mathcal{C}(P)$
P

$[f]$ discriminante A $\quad \tilde{P} \equiv (\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_n) \in \mathbb{P}^n$

Cerco i punti $Q \equiv (x_0, \dots, x_n)$ coniugati a $\tilde{P}$ rispetto a $[f]$

$$\underbrace{(\tilde{x}_0 \cdots \tilde{x}_n)}_{1 \times (n+1)} \cdot \underbrace{A}_{(n+1)\times(n+1)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{(n+1)\times 1} = 0$$

Nota: $(\tilde{x}_0 \cdots \tilde{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_0 \cdots x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$

DIM: il prodotto è una matrice 1×1, quindi simmetrica:

$$\left((\tilde{x}_0 \cdots \tilde{x}_n) \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)^t = (\tilde{x}_0 \cdots \tilde{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= (x_0 \cdots x_n) \cdot A^t \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \text{(A è simmetrica)}$$

Caso $\tilde{P} \in W$ $\quad A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Allora $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \forall (x_0 \cdots x_n)$$

Caso $\tilde{P} \notin W$, allora $A \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_0 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Dunque $\begin{pmatrix} \tilde{x}_0 & \cdots & \tilde{x}_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} b_0 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$b_0 x_0 + \cdots + b_n x_n = 0$ questo è un iperpiano

non tutti nulli

Sia $\tilde{P} \notin W$ Sia $\overline{Q} = (\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n) \in W$

$$\tau(\tilde{P}) : (\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Contiene $\overline{Q}$?

$$(\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_n) \cdot A \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = (\tilde{x}_0 \dots \tilde{x}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Si

$P \equiv (\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n)$, $Q \equiv (\overline{\overline{x}}_0, \dots, \overline{\overline{x}}_n)$ $\quad P, Q \notin W$

TEOR – $P \in \tau(Q) \iff Q \in \tau(P)$

DIM – $P \in \tau(Q) \iff (\overline{x}_0, \dots, \overline{x}_n)$ saddisfa $(\overline{\overline{x}}_0 \dots \overline{\overline{x}}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff$

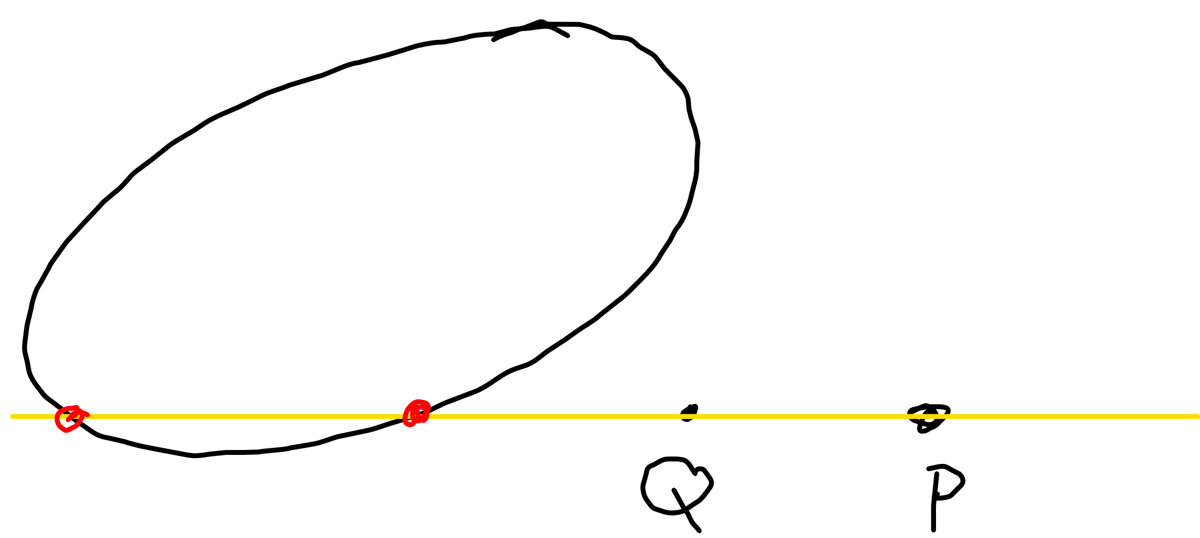
$\iff (\overline{\overline{x}}_0 \dots \overline{\overline{x}}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{x}_0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = 0 \iff (\overline{x}_0 \dots \overline{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{\overline{x}}_0 \\ \vdots \\ \overline{\overline{x}}_n \end{pmatrix} = 0 \iff$

$\iff Q$ saddisfa $(\overline{x}_0 \dots \overline{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff Q \in \tau(P)$

PROP – $P \in \mathcal{C}(p) \iff P \in \mathrm{Im}[f]$
$= (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_n)$

DIM – $P \in \mathcal{C}(P) \iff P$ soddisfa $(\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff$

$\iff (\bar{x}_0 \dots \bar{x}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_0 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix} = 0 \iff P \in \mathrm{Im}[f]$



$P \equiv (\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n)$, $Q \equiv (\bar{Y}_0, \dots, \bar{Y}_n) \quad \in \mathbb{P}^n$

retta r per P e Q: il generico punto $Z \in r$ ha coordinate

$$Z \equiv (\bar{Z}_0, \dots, \bar{Z}_n) = \lambda(\bar{X}_0, \dots, \bar{X}_n) + \mu(\bar{Y}_0, \dots, \bar{Y}_n)$$

con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$

Cercoi punti d'intersezione con $Im[f]$

$$\begin{cases} (\bar{Z}_0 \dots \bar{Z}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \bar{Z}_0 \\ \vdots \\ \bar{Z}_n \end{pmatrix} = 0 \\ (\bar{Z}_0, \dots, \bar{Z}_n) = \lambda(\bar{X}) + \mu(\bar{Y}) \end{cases}$$

risolvo, in λ e μ,

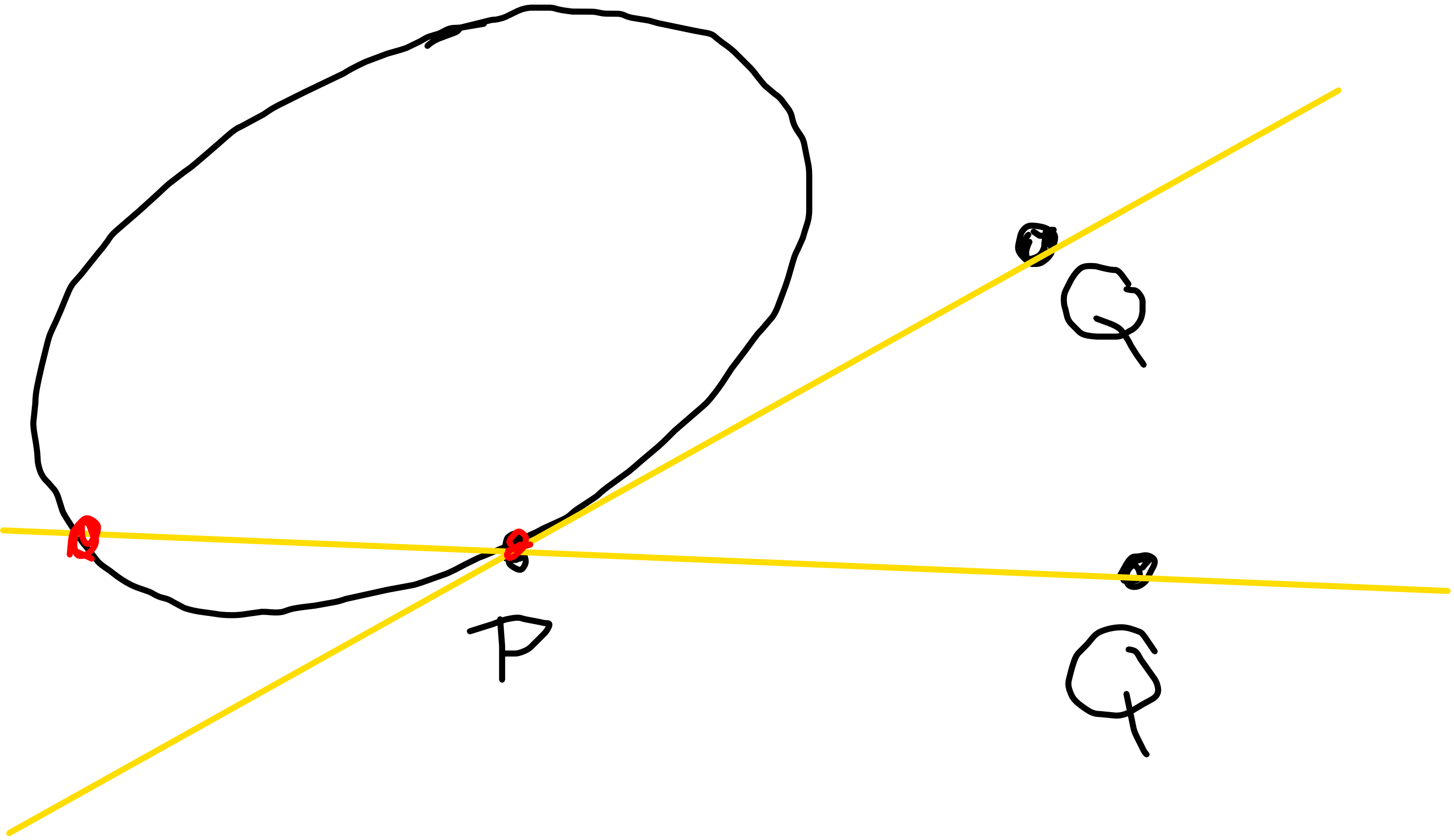
$$(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} \qquad (\bar{Y}) = \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}$$

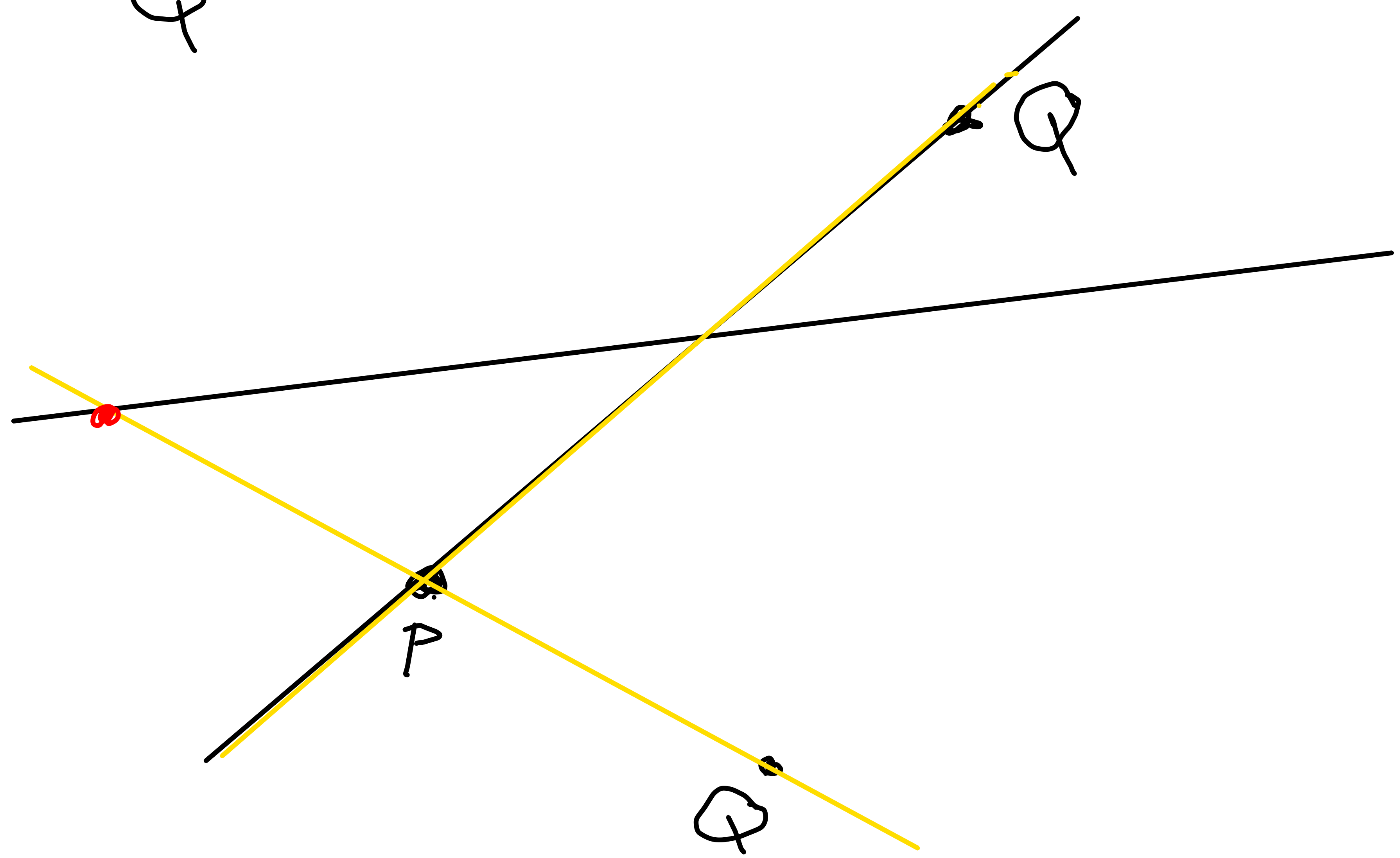
$$\left(\lambda \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}\right)^t \cdot A \cdot \left(\lambda \begin{pmatrix} \bar{X}_0 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar{Y}_0 \\ \vdots \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\left(\lambda (\bar{X})\right)^t \cdot A \cdot \left(\lambda (\bar{X}) + \mu (\bar{Y})\right) + \left(\mu (\bar{Y})\right)^t \cdot A \cdot \left(\lambda (\bar{X}) + \mu (\bar{Y})\right) = 0$$

$$(\lambda (\bar{X}))^t \cdot A \cdot (\lambda (\bar{X})) + \underbrace{(\lambda (\bar{X}))^t \cdot A \cdot (\mu (\bar{Y}))}_{} + \underbrace{(\mu (\bar{Y}))^t \cdot A \cdot (\lambda (\bar{X}))}_{} + (\mu (\bar{Y}))^t \cdot A \cdot (\mu (\bar{Y})) = 0$$

$$\lambda^2 (\bar{X})^t \cdot A (\bar{X}) + 2\lambda\mu (\bar{X})^t \cdot A (\bar{Y}) + \mu^2 (\bar{Y})^t \cdot A \cdot (\bar{Y}) = 0 \qquad *$$


P
Q
Q


P
Q
Q

$P \equiv (\overline{X}) \in I_m$

$$\lambda^2 (\overline{X})^t \cdot A (\overline{X}) + 2\lambda\mu (\overline{X})^t \cdot A (\overline{Y}) + \mu^2 (\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0 \quad *$$

$= 0$

$$\mu \left(2\lambda (\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) + \mu (\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) \right) = 0$$

μ in evidenza dice semplicemente che $P \in r \cap I_m$

Cerco l'altro punto d'intersezione:

Risolvo $2 (\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) + \dfrac{\mu}{\lambda} (\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0$

$$\frac{\mu}{\lambda} = - \frac{2 (\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y})}{(\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y})} \quad \neq 0$$

Posso risolvere così nel caso $Q \notin I_m$.

Quand'è che questo punto coincide con P?
Quando nuovamente $\mu = 0$

$$\mu = 0 \iff \frac{\mu}{\lambda} = 0 \iff \frac{2(\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y})}{(\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y})} = 0 \iff$$

$$\iff (\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0 \iff Q \in \mathcal{Z}(P)$$

Secondo caso di tangenza: $r \subset \mathcal{I}_m$; se siamo in questo caso, l'uguaglianza $*$ dev'essere un'identità, cioè verificata $\forall (\lambda, \mu)$; ciò accade $\iff$ tutti i coefficienti sono nulli.

$$\lambda^2 (\overline{X})^t \cdot A(\overline{X}) + 2\lambda\mu (\overline{X})^t \cdot A(\overline{Y}) + \mu^2 (\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0 \quad *$$

$$\underbrace{(\overline{X})^t \cdot A(\overline{X})}_{=0 \ (P \in Im)} \qquad \underbrace{(\overline{Y})^t \cdot A \cdot (\overline{Y})}_{=0 \ (\text{anche } Q \in Im)}$$

$$\Downarrow$$

$$(\overline{X})^t \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0$$

si deduce che anche in questo caso

$Q \in \tau(P)$.

TEOR – Sia $[f]$ un'iperquadrica non specializzata di $\mathbb{P}^n$. Sia Π un iperpiano di $\mathbb{P}^n$. L'iperquadrica di Π data dall'intersezione $\Pi \cap \mathrm{Im}[f]$ è specializzata $\iff$ Π è tangente a $[f]$. In tal caso, $\Pi \cap \mathrm{Im}[f]$ è

o (1) costituita dal solo punto P

o (2) un'unione di rette per P.

Dimostro: l'intersezione $\tau(P) \cap \mathrm{Im}[f] =$

$= o\ (1)\ o\ (2)$

Π tangente in P è $\tau(P)$

Congruenza fra matrici simmetriche

Siano $A, B \in M_n$ simmetriche. Definisco

A congruente a $B \iff \exists\, E \in GL_n$ tale che $B = E^t \cdot A \cdot E$

cioè E regolare, $|E| \neq 0$, $\exists\, E^{-1}$

PROP – La congruenza è una relazione di equivalenza.

PROP – A è congruente a $B \iff \exists$ forma quadratica q, $\exists$ basi ordinate $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ per cui A rappresenta q rispetto a $\mathcal{B}$, B rappresenta q rispetto a $\mathcal{B}'$

PROP - A è congruente a B

$\Updownarrow$

rispetto ad una stessa base $\mathcal{B}$, A rappresenta una forma quadratica q su V ed esiste un automorfismo T di V per cui B rappresenta la forma quadratica $q \circ T$.

Teoremi di congruenza

TEOR - A (simmetrica) è congruente a ogni matrice diagonale D che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità.

Traccia di dim.:

- Se una qualunque matrice quadrata M è diagonalizzabile per similitudine, allora esiste una $E \in GL_n$ per cui $A = E^{-1} \cdot D \cdot E$ con D come sopra
- Ogni simmetrica è diagonalizzabile per similitudine, e la E può essere scelta ortogonale, cioè con $E^{-1} = E^t$
- Se M è diagonalizzabile per similitudine, ogni suo autovalore ha molteplicità algebrica = molt. geometrica

TEOR - $A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica. Allora A è congruente a $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ con r = rango di A.

DIM - Sa che A è congruente a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$ autovalori

eventuale autovalore 0 con la sua molteplicità

$$F = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{r} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

perciò Λ è congruente a D e, per transitività, ad A.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

è detta forma canonica per congruenza di A.

DIM – Se $\tau(P) \cap Im[f] = \{P\}$ abbiamo finito (1).

Supponiamo che esista $Q \equiv (\bar{y})$ con $Q \neq P$, $Q \in \tau(P) \cap Im[f]$.

$$\lambda^2 \underbrace{(\bar{x})^t \cdot A (\bar{x})}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ P \in Im[f]}} + 2\lambda\mu \underbrace{(\bar{x})^t \cdot A (\bar{y})}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ Q \in \tau(P)}} + \mu^2 \underbrace{(\bar{y})^t \cdot A \cdot (\bar{y})}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ Q \in Im[f]}} = 0 \qquad *$$

Ma allora ogni (λ, μ) soddisfa $*$, cioè ogni punto $\bar{z}$ della retta PQ appartiene all'intersezione