In $\mathbb{C}$: Forma canonica per congruenza di A (simmetrica):

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{matrix}}^{r} & \\ & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

$r =$ rango di A

COR- In $\mathbb{C}$

A congruente a $B \iff \text{rango}(A) = \text{rango di } B$

A congruente a

Ind

$$D = \overbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}^{\text{autovalori di } A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E^t} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1_{r} & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\lambda_r} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E}$$

In $\mathbb{R}$ A è congruente a

$$
D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_{\sigma_+} & & & & & \\ & & & \lambda_{\sigma_+ +1} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \lambda_{\sigma_+ + \sigma_-} & & \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

autovalori positivi: $\lambda_1, \dots, \lambda_{\sigma_+}$

autovalori negativi: $\lambda_{\sigma_+ +1}, \dots, \lambda_{\sigma_+ + \sigma_-}$

$$
= \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_{\sigma_+}} & & & \\ & & & \sqrt{-\lambda_{\sigma_+ +1}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sqrt{-\lambda_{\sigma_+ + \sigma_-}} \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{E^t}
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\sigma_+ \text{ volte } 1,\ \sigma_- \text{ volte } -1}}
\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sqrt{-\lambda_{\sigma_+ +1}} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}}_{E}
$$

Forma canonica per congruenza di A in $\mathbb{R}$

Segnatura di A simmetrica reale: $\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$,

dove σ_+ è la somma delle molteplicità degli autovalori > 0

σ_- " " " " " " < 0.

COR - In $\mathbb{R}$

A è congruente a B $\iff$ $\sigma(A) = \sigma(B)$.

(dello stesso ordine)

Teor. di Harriot-Cartesio semplificata.

Sia $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polinomio a coeff. reali $(a_0 \neq 0,\ a_n \neq 0)$ semplificazione privo di radici complesse a parte immaginaria non nulla (cioè tali che la somma delle molteplicità delle radici reali sia n)

Nella sequenza $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, se ci sono zeri do loro un segno arbitrario + o −. Chiamo

permanenza ogni coppia di coefficienti consecutivi di segno uguale

variazione " " " " " diverso

Allora

La somma delle molteplicità delle radici positive è uguale al n. di variazioni

" " " " " " negative " " " permanenze.

COR - Data A reale simmetrica,

$\sigma(A) = (\sigma_+, \sigma_-)$ dove

σ_+ è il n. di variazioni del polin. caratt. di A

σ_- " " " permanenze " " " " "

Questa è il polin. caratt. di una reale simm. A:

$$-4143 - 1407\lambda + 775\lambda^2 + 5\lambda^3 - 19\lambda^4 + \lambda^5$$

$$\sigma(A) = (3, 2)$$

F. can. per congr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 \\ & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Es. Data la conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$\Gamma: X_0^2 - 4X_0X_1 + X_1^2 + 6X_1X_2 - 3X_2^2 = 0$$

trovare la polare di $P = (1,0,1)$ risp. a Γ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad (1\ 0\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$1X_0 + 1X_1 - 3X_2 = 0$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}$$

Trovare il polo Q della retta

$$r: X_0+2X_1-X_2=0$$

Trovo 2 punti su r: $B\equiv(0,1,2)$ $C\equiv(-2,1,0)$

polari di B e C:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0\\ X_1\\ X_2\end{pmatrix}=0 \quad \begin{cases}-2X_0+7X_1-3X_2=0\\ -4X_0+5X_1+3X_2=0\end{cases}$$

Q

$$\begin{pmatrix}-2 & 7 & -3\\ -4 & 5 & 3\end{pmatrix} \quad (X_0,X_1,X_2)=\alpha\left(\begin{vmatrix}7 & -3\\ 5 & 3\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-2 & -3\\ -4 & 3\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-2 & 7\\ -4 & 5\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\alpha(6,18,18)=\beta(1,3,3)$$

In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sia data la quadrica

$$Q: 2X_0^2 - 4X_0X_2 + 2X_0X_3 + X_1^2 - 2X_1X_2 + 6X_2X_3 - X_3^2 = 0$$

Trovare il polo del piano $\pi: X_0 + X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 0$ rispetto a Q.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

su π trova 3 punti non allineati

$$B \equiv (0, 2, 1, 0)$$
$$C \equiv (0, 3, 0, 1)$$
$$D \equiv (1, -1, 0, 0)$$

$$\det = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

Piani polari di B, C, D:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$(0\ 2\ 1\ 0) \cdot$

$(0\ 3\ 0\ 1)$

$(1\ -1\ 0\ 0)$

$$Q : \begin{cases} -2x_0 + x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1x_0 + 3x_1 \quad - x_3 = 0 \\ 2x_0 - x_1 - x_2 + 1x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Q \equiv \alpha\left(\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

ATTENZIONE: In tutte le seguenti classificazioni farò delle asserzioni su come sono fatte le immagini. Tali asserzioni non sono affatto immediate; dovrebbero essere dimostrate caso per caso. Il vantaggio teorico è che ogni dimostrazione (che NON farò) può essere condotta sul "prototipo" dato dalla forma can. per congruenza, in quanto le proprietà dichiarate sono invarianti per proiettività.

Classificazione delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$:

Rango 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 = 0$ Una retta "contata 2 volte"

W: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ La stessa retta

---

Rango 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ Unione di due rette

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Un punto: l'intersezione delle due rette

Rango 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ Un insieme di infiniti punti, non contenente rette.

$$V: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \quad \emptyset$$

Classificazione delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Rango 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 = 0$ Un piano "contato 2 volte"

$$V: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$ Lo stesso piano

Rango 2 $\quad I_m : X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ Unione di due piani

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

$$W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Una retta: l'intersezione dei due piani

Rango 3 $\quad I_m : X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$ $\quad$ Unione di infinite rette passanti per uno stesso punto

generatrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Un punto: quello lì

Rango 4

$$\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$$

Im: $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

Insieme di ∞ punti, non contenente piani, tale che per ogni suo punto passano 2 rette contenute nell'immagine

generatrici

$$W: \begin{cases} x_0=0 \\ x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \qquad \emptyset$$