# Gruppo

$$(\mathbb{Z},+)$$

$$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$(-1)+7=6$$

1) L'operazione + è associativa:

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

2) Esiste l'elemento neutro 0

$$a+0=0+a=a$$

3) Per ogni elemento $a$ esiste il suo opposto $-a$

$$a+(-a)=(-a)+a=0$$

$(M, \circ)$ (insieme dei movimenti rigidi dello spazio intorno a un punto fissato, con l'operazione di composizione $\circ$) è un gruppo.

1) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

2) id

3) $\forall a \in M \; \exists \, a^{-1}$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathbb{Q},+) \\ (\mathbb{R},+) \\ (\mathbb{R}^+,\cdot) \end{array}\right\} \text{gruppi}$$

$(\mathbb{N},+)$ NON è un gruppo

$(\mathbb{Z}_n, +)$

$\{0, \ldots, n-1\}$

$(\mathbb{Z}_3, +)$ $\quad 2+2=1$

$$(\mathbb{Z}_{10}, +)$$

$$8 + 7 = 5$$

$(G, *)$

Se $a * b = b * a$

Diciamo allora che $(G, *)$ è commutativo.

# Anello

Generalizza $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

$\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo commutativo.

1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

2) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

---

Anello delle matrici quadrate.

$$\begin{pmatrix} 2 & \pi & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

matrice $2 \times 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 7 \\ 100 & -4 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 3}$$

Si dicono matrici quadrate le matrici $m \times n$ con $m = n$.

Consideriamo l'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici $n \times n$ a coefficienti reali.

Si possono definire due operazioni binarie:

somma: $$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boxed{-1} & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{3} & \underline{0} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} & \overset{2}{\boxed{\begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}}} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 7 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & 13 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$\left( M_n(\mathbb{R}), +, \cdot \right)$ è un anello

---

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 25 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Campo}}$ =

||

anello $(A, +, \cdot)$

commutativo con unità

in cui ogni elemento che non sia l'unità di + ammette inverso rispetto all'operazione $\cdot$ .

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un anello comm. con unità. Ogni elemento diverso da 0 ammette inverso.

$$3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

L'anello delle matrici $\underline{n \times n}$

NON

è un campo!

Gruppo : $(\mathbb{Z}, +)$

Anello : $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Campo : $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$

$(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ē un campo

$3 \cdot 4 = 2$

$2 \cdot 3 = 1$

$3^{-1} = 2$

Consideriamo l'anello delle matrici reali n×n.

$$\exists \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = -9$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1}} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

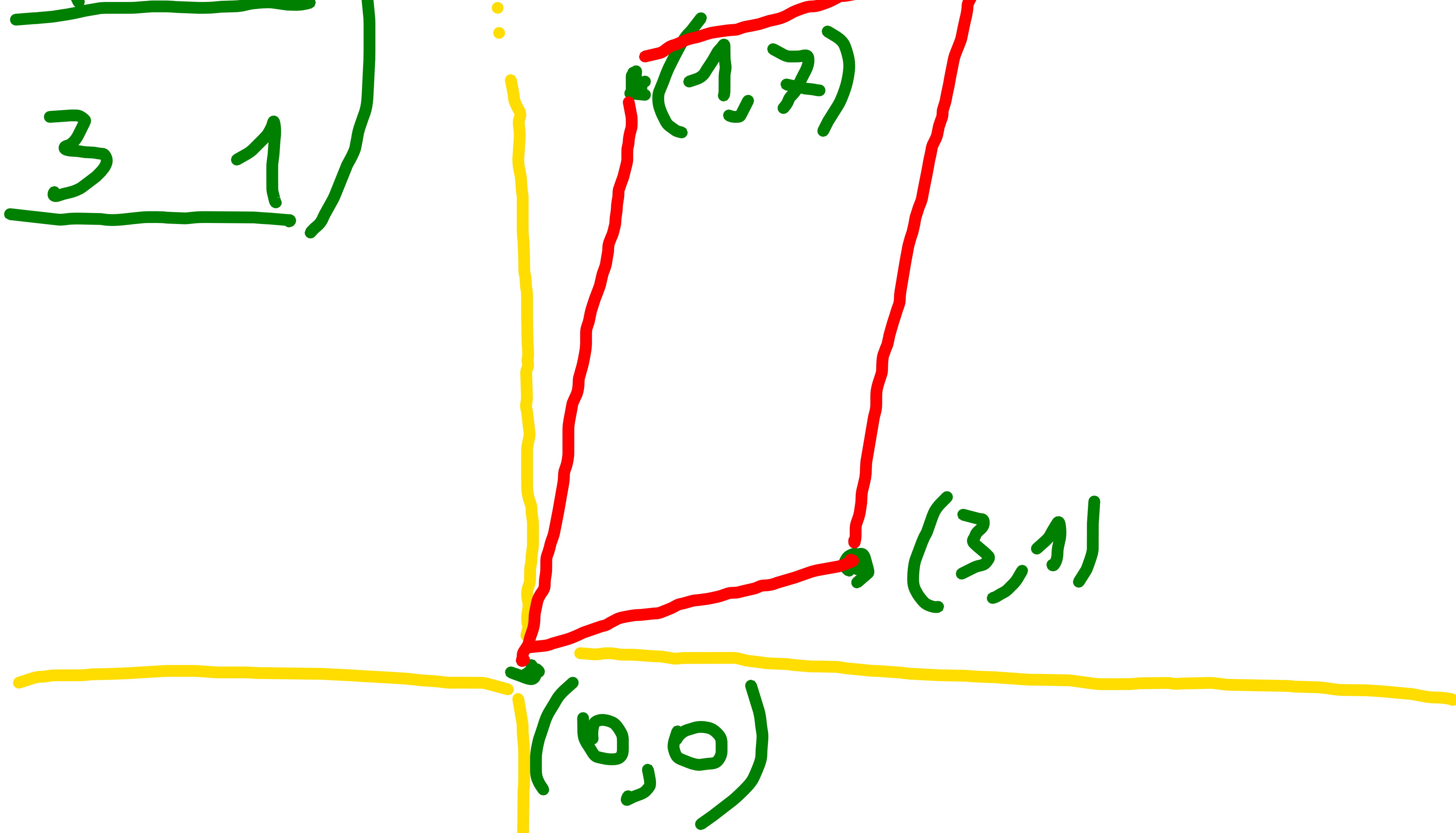
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$.

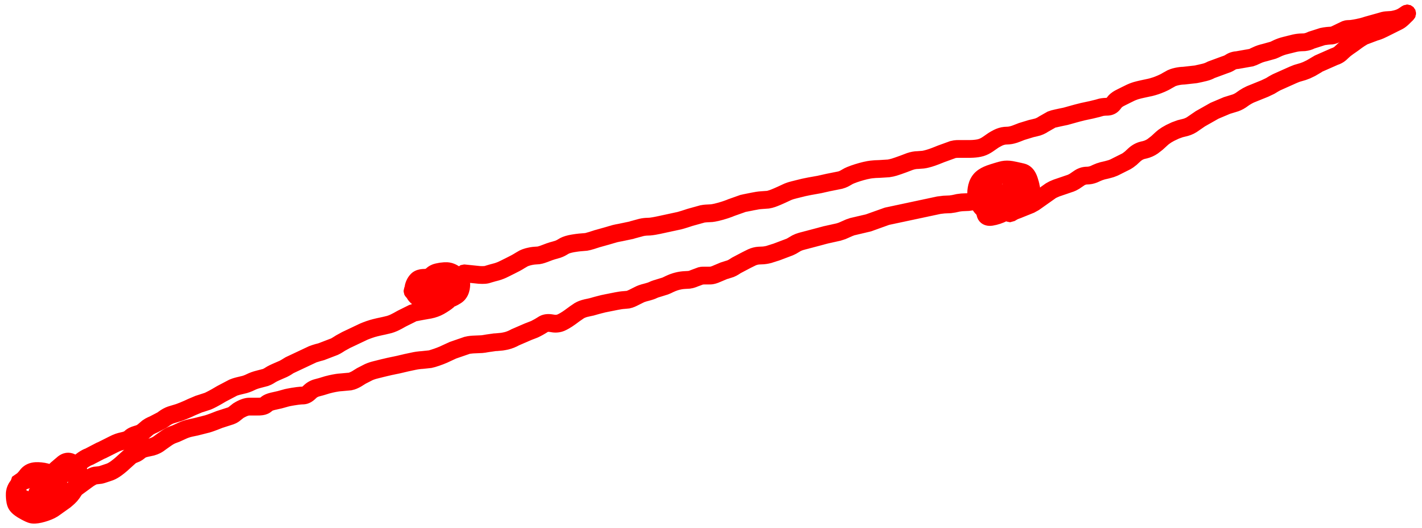
Che cos'è il determinante?

Come si calcola la matrice inversa?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$



det A è, a meno del suo segno, l'area del parallelogramma.



$A \in M_n(\mathbb{R})$ $\quad A = (a_{ij})$

$$\det A = \sum_{p \in S_n} \boxed{\operatorname{sign} p}\; \underline{a_{1p(1)} \cdots a_{np(n)}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad S_n$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{card} S_3 = 6$$

$$\operatorname{card} S_n = n(n-1)(n-2) \ldots \cdot 1 = n!$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$$

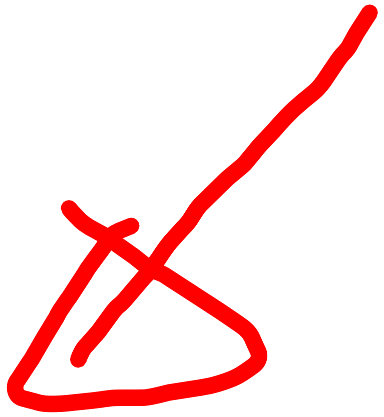
$$\operatorname{sign} p = \cancel{?} \ -1$$

---

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{matrix}$$

$$\operatorname{sign} p = (-1)^{\text{numero scambi}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\det A = \sum_{p \in S_2} \underline{\operatorname{sign} p}\, a_{1p(1)} a_{2p(2)}$$

$$S_2 = \left\{ \underset{s=1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}, \underset{s=-1}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

$$+1\, a_{11} a_{22} + (-1)\, a_{12} a_{21}$$

Per i calcoli concreti si usa la formula di <u>LAPLACE</u>.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

$n \times n$

$$(-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot 8$$

$$\det A = -2 - 34 - 8 = -44$$

-2

-34

-8

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det \boxed{M_{1j}}$$

matrice
ottenuta da A
cancellando
la riga 1
e la colonna j

$$\det A = \sum_{\boxed{j}=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

$$= \sum_{\boxed{i}=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{-1} \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

n × n

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & \boxed{2} & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -34 \\ -10 \\ \hline -40 \end{array}$$

$$(-1)^5 \cdot 2 \cdot 5 = -10$$

# Trasformazioni riga

1) Moltiplicare una riga di A per $c \neq 0$.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -5 \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = -20$$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3}\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Scambiare due righe

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3) Se aggiungo a una riga un multiplo di un'altra riga, il determinante non cambia.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & -11 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$