$X, Y \quad f: X \to Y$ biiettiva

$$X \cap Y = \emptyset \iff f(X) \cap f(Y) = \emptyset$$

$W = \mathbb{R}^3$

Una forma lineare φ su W è un'applicazione $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineare

Come sono fatte le forme lineari su $\mathbb{R}^3$?

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto ax + by + cz$$

per certi fissati $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto dx + ey + fz$$

$$\varphi+\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto ax+by+cz+dx+ey+fz =$$
$$= (a+d)x + (b+e)y + (c+f)z$$

$\alpha \in \mathbb{R}$

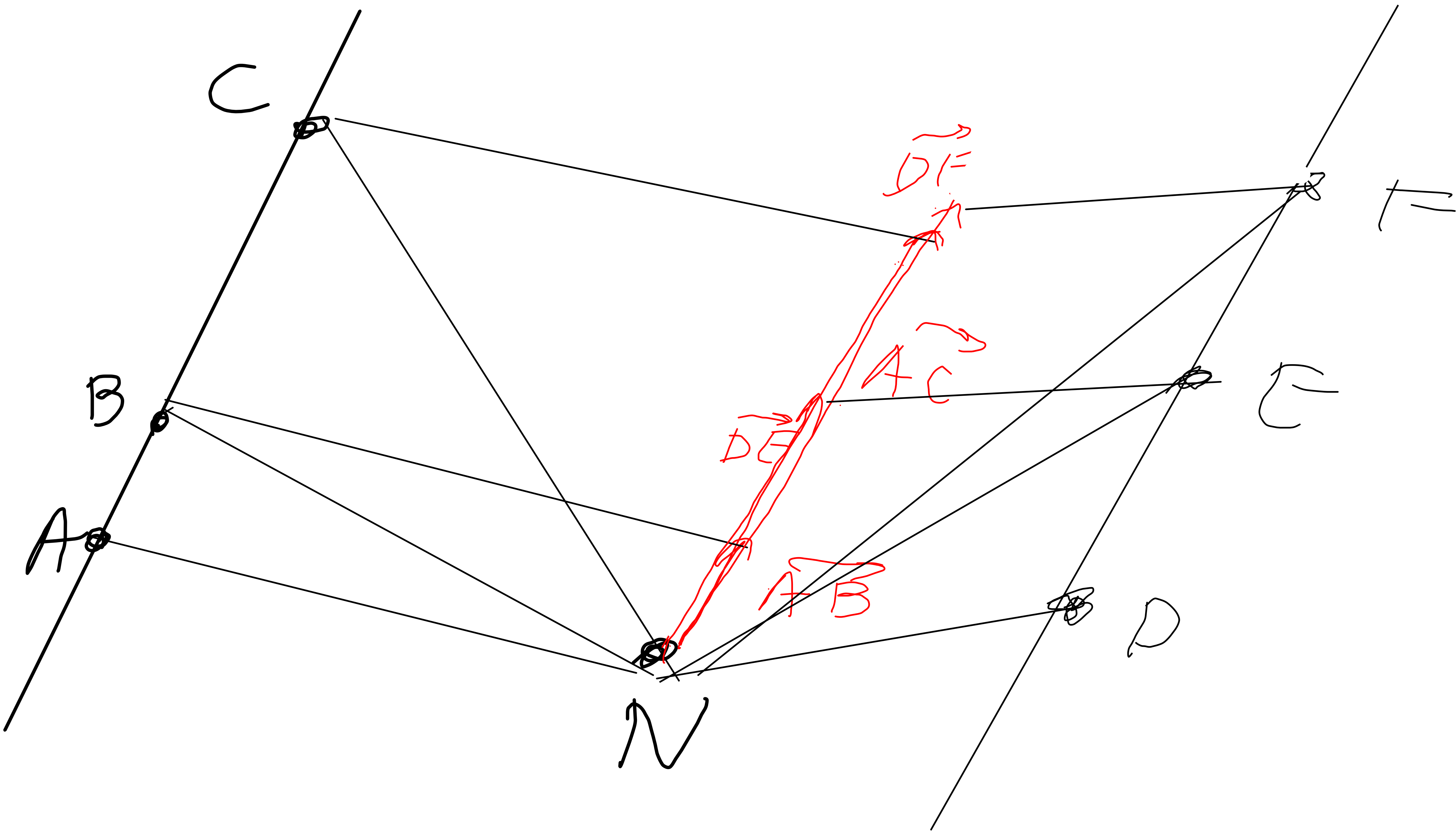
$$\alpha\cdot\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longmapsto \alpha\cdot(ax+by+cz) =$$
$$= \alpha a x + \alpha b y + \alpha c z$$

I punti dello spazio proiettivo associato a W^* (lo sp. vett. delle forme lineari su W) vengono chiamati iperpiani dello spazio proiettivo associato a W. Perché?

In $\mathbb{R}^3$ cos'è un iperpiano (secondo le nozioni del primo anno)? È un sottospazio vettoriale di dimensione $3-1=2$, quindi un oggetto descritto in forma cartesiana da qualcosa come

$$ax+by+cz=0$$

con $(a,b,c)\neq(0,0,0)$


C
B
A
N
F
E
D
$\overrightarrow{DF}$
$\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{DE}$
$\overrightarrow{AB}$

$v_1, \dots, v_h$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists$ scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h = \bar{0}$$

vettore nullo

Siano $v_1 = \alpha_1^{\neq 0} v_1'$, $v_2 = \alpha_2^{\neq 0} v_2'$, ..., $v_h = \alpha_h^{\neq 0} v_h'$

Supponendo $v_1, \dots, v_h$ lin. dip., $\exists$ $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ non tutti nulli t.c. $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_h v_h = \bar{0}$

$$\lambda_1(\alpha_1 v_1') + \lambda_2(\alpha_2 v_2') + \dots + \lambda_h(\alpha_h v_h')$$

$\mu_1 = \lambda_1 \alpha_1$, $\mu_2 = \lambda_2 \alpha_2$, ..., $\mu_h = \lambda_h \alpha_h$ sono non tutti nulli e

$$\mu_1 v_1' + \dots + \mu_h v_h' = \bar{0}_V$$

$$\frac{3}{5} > \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}$$

$$\frac{6}{10} > \frac{10}{40}$$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{qm + np}{n \cdot q}$$

$$\cancel{\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m+p}{n+q}} \qquad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q}$$

$\mathbb{R}P^2$ Problema: i punti

$A=[(1,2,3)]$, $B=[(1,1,1)]$, $C=[(3,4,5)]$

sono lin. dip. o indip.?

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \det\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

lin. dip.

In $\mathbb{R}P^2$ rappresentare in forma cartesiana il sottospazio (retta) contenente $A=[(1,2,3)]$ e $B=[(1,1,1)]$.

$A \neq B$ in quanto $(1,2,3) \not\sim (1,1,1)$. Impongo a $X=[(x_0,x_1,x_2)]$, A, B di essere lin. dip.

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = M \qquad |M| \neq 0$$

(l'unico orlato di M è la matrice stessa.

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} (x_0-x_1) & -1 & 0 \\ x_1 & 2 & 1 \\ (x_2-x_1) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad - \begin{vmatrix} (x_0-x_1) & -1 \\ (x_2-x_1) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\left((x_0-x_1)+(x_2-x_1)\right) = 0 \qquad x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$$

In $\mathbb{P}^3$ $A=[(1,2,3,4)]$, $B=[(1,1,1,1)]$.

Scrivere in forma cartesiana la retta AB

$$(1,2,3,4) \nsim (1,1,1,1)$$

$$\begin{pmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 1 \\ X_2 & 3 & 1 \\ X_3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 1 \\ X_2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} X_0 & 1 & 1 \\ X_1 & 2 & 1 \\ X_3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} (X_0-X_1) & -1 & 0 \\ X_1 & 2 & 1 \\ (X_2-X_1) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex] \begin{vmatrix} (X_0-X_1) & -1 & 0 \\ X_1 & 2 & 1 \\ (X_3-X_1) & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(X_0-X_1)-(X_2-X_1)=0 \\ -2(X_0-X_1)-(X_3-X_1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -X_0+2X_1-X_2=0 \\ -2X_0+3X_1-X_3=0 \end{cases}$$

In $\mathbb{RP}^3$ $A=[(1,2,3,4)]$, $B=[(1,1,1,1)]$, $C=[(1,0,0,0)]$

Scrivere in forma cartesiana il sottospazio P' di minima dimensione contenente A, B, C.

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 & 0 \\ x_3 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Impongo $\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & 2 & 1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 & 0 \\ x_3 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$-\begin{vmatrix} x_1 & 2 & 1 \\ x_2 & 3 & 1 \\ x_3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -\begin{vmatrix} (x_1-x_2) & -1 & 0 \\ x_2 & 3 & 1 \\ (x_3-x_2) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} (x_1-x_2) & -1 \\ (x_3-x_2) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x_1-x_2)+(x_3-x_2)=0 \qquad P': \ x_1-2x_2+x_3=0$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$|A| = c \cdot \cancel{(-1)}^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} + f\,\cancel{(-1)}^{2+3} \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} + i \cdot \cancel{(-1)}^{3+3} \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Fissa una base ordinata

$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

$$v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

$$\Phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad v \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

$$\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$$

$$\vec{\mathcal{B}} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$$

base dello sp. dei vett. liberi

$$\vec{OP} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

$$\Phi_{\mathcal{R}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \qquad P \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

come spazio affine

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[d] & p \arrow[d, mapsto, "\Phi_Q"] & \text{punto proiettivo} \\ \mathbb{RP}^n & {[(x_0, x_1, \dots, x_n)]} & \end{tikzcd}$$