$$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$$

$$
\begin{tikzcd}
v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \arrow[d, mapsto] & V \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\
(x_1, \dots, x_n) & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{P}^n \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, mapsto] \\
\mathbb{R}P^n & {[(X_0, \dots, X_n)]}
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{P}$ sp. pr. di dim $= 1$ $\mathcal{G}$ rif. pr. su $\mathbb{P}$.

Sono dati i tre punti

$A \equiv_{\mathcal{G}} \overset{u=}{(2,3)}$, $B \equiv_{\mathcal{G}} \overset{v=}{(1,1)}$, $C \equiv_{\mathcal{G}} \overset{w=}{(7,9)}$.

a) Si verifichi che $\overline{\mathcal{G}} = (A, B, C)$ è un rif. pr.

b) Si trovi una base normalizzata risp. a $\overline{\mathcal{G}}$

c) Dato il punto $P \equiv_{\mathcal{G}} (1, -9)$, se ne trovino le coordinate risp. ad $\overline{\mathcal{G}}$

---

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\overline{\mathcal{G}}$ è un rif. pr.

Devo trovare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui

$\alpha u + \beta v = w$ (o un multiplo di w)

$\alpha(2,3) + \beta(1,1) = (7,9)$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 7 \\ 3\alpha + \beta = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 7 \\ \alpha = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = 7 - 4 = 3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$\bar{u} = 2u = (4,6)$ $\bar{v} = 3v = (3,3)$

$\bar{\mathcal{B}} = (\bar{u}, \bar{v})$ è una base normalizzata risp. ad $\bar{g}$

---

c) $P =_{g} (1,-9)$ Cerco $X_0, X_1 \in \mathbb{R}$ taliche $X_0(4,6) + X_1(3,3) = (1,-9)$

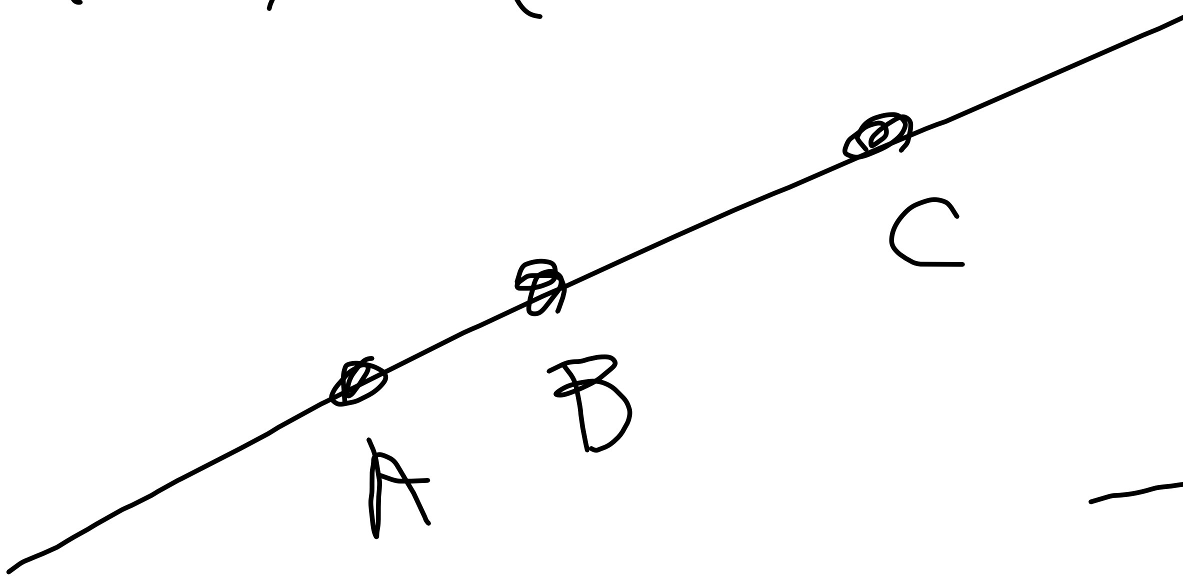
$$\begin{cases} 4X_0 + 3X_1 = 1 \\ 6X_0 + 3X_1 = -9 \end{cases} \quad \begin{cases} 4X_0 + 3X_1 = 1 \\ 2X_0 = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} 3X_1 = 1 + 20 \\ X_0 = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = 7 \\ X_0 = -5 \end{cases} \Rightarrow P =_{\bar{g}} (-5,7)$$

Affinità del piano:

$$f: \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{f(A)f(B)}}{\overline{f(A)f(C)}}$$

Siano: $V = \{$polinomi in x, di gr. $\leq 1\}$ $\mathcal{B} = (1, x)$

$W = \{$pol. in x, di gr. $\leq 2\}$ $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$

$T : V \longrightarrow W$

$p(x) \longmapsto x\,p(x) + p'(x)$

Si scriva la matrice $M \in \mathcal{M}_{3\times 2}$ che rappresenta T risp. a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

$T(1) = x + 0 = x \equiv_{\mathcal{B}'} (0, 1, 0)$

$T(x) = x^2 + 1 = 1 + x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (1, 0, 1)$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Chi è $T(5 - 7x)$?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$T(5 - 7x) = -7 + 5x - 7x^2$

$$V \longrightarrow V'$$

TEOR (fondamentale sulle trasf. lineari)

Data una base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ in V e data un'applicazione arbitraria $f : \mathcal{B} \to V'$, $\exists!\, T : V \to V'$ lineare tale che $\forall i$

$$T(v_i) = f(v_i)$$