$$V \longrightarrow V'$$

TEOR (fondamentale sulle trasf. lineari)

Data una base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ in V e data un'applicazione arbitraria $f : \mathcal{B} \to V'$, $\exists!\ T : V \to V'$ lineare tale che $\forall i$

$$T(v_i) = f(v_i)$$

$V = \{\text{pol. di gr.} \leq 1\}$ $\quad \mathcal{B} = (1, x)$

$V' = \{\text{pol. di gr} \leq 2\}$ $\quad \mathcal{B}' = (1, x, x^2)$

a) Verificare che $\bar{\mathcal{B}} = (1+x, 2+x)$ è una base (ord.) di V.

b) Scrivere, risp. a $\bar{\mathcal{B}}$ e $\mathcal{B}'$, la matrice M che rappresenta la trasf. lin. $S : V \to V'$ tale che

$S(1+x) = 1+x+x^2, \quad S(2+x) = 3x - x^2$

---

a) $1+x \equiv_{\mathcal{B}} (1,1) \quad 2+x \equiv_{\mathcal{B}} (2,1) \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$ base

$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad M \cdot \cancel{X} \cdot \cancel{X^{-1}} = Y \cdot X^{-1}$$

$$X^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\, {}^t(A^{\#}) = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}, \mathbb{P}'$ In $\mathbb{P}$, $\overline{\mathcal{G}} = (A \equiv_{\mathcal{G}} (2,3), B \equiv_{\mathcal{G}} (1,1), C \equiv_{\mathcal{G}} (7,9))$

In $\mathbb{P}'$, $\overline{\mathcal{G}}' = (D \equiv_{\mathcal{G}'} (1,0), E \equiv_{\mathcal{G}'} (-3,-1), F \equiv_{\mathcal{G}'} (17,3))$

---

a) Verificare che $\overline{\mathcal{G}}'$ è un rif. pro.;

b) Scrivere, rispetto ad $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{G}'$, la matrice M che rappresenta la proiettività $\omega : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{P}'$ tale che $\omega(A) = D$, $\omega(B) = E$, $\omega(C) = F$.

---

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 17 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} -3 & 17 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 17 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓ rif. pr.

---

b) Abbiamo trovato una base normalizzata rispetto ad $\mathcal{G}$: $\overline{\mathcal{B}} = ((4,6), (3,3))$

Trovo una base normalizzata risp. a $\mathcal{B}'$: cerco α, β t.c. $\alpha(1,0)+\beta(-3,-1)=(17,3)$

$$\begin{cases} \alpha - 3\beta = 17 \\ -\beta = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 17-9 = 8 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

$$\overline{\mathcal{B}} = \left(8(1,0),\ -3(-3,-1)\right) = \left((8,0),\ (9,3)\right)$$

Cerco la matrice M della trasf. lineare che trasforma $\overline{\mathcal{B}}$ in $\mathcal{B}'$:

$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad M = Y \cdot X^{-1} =$$

$$|X| = -6$$

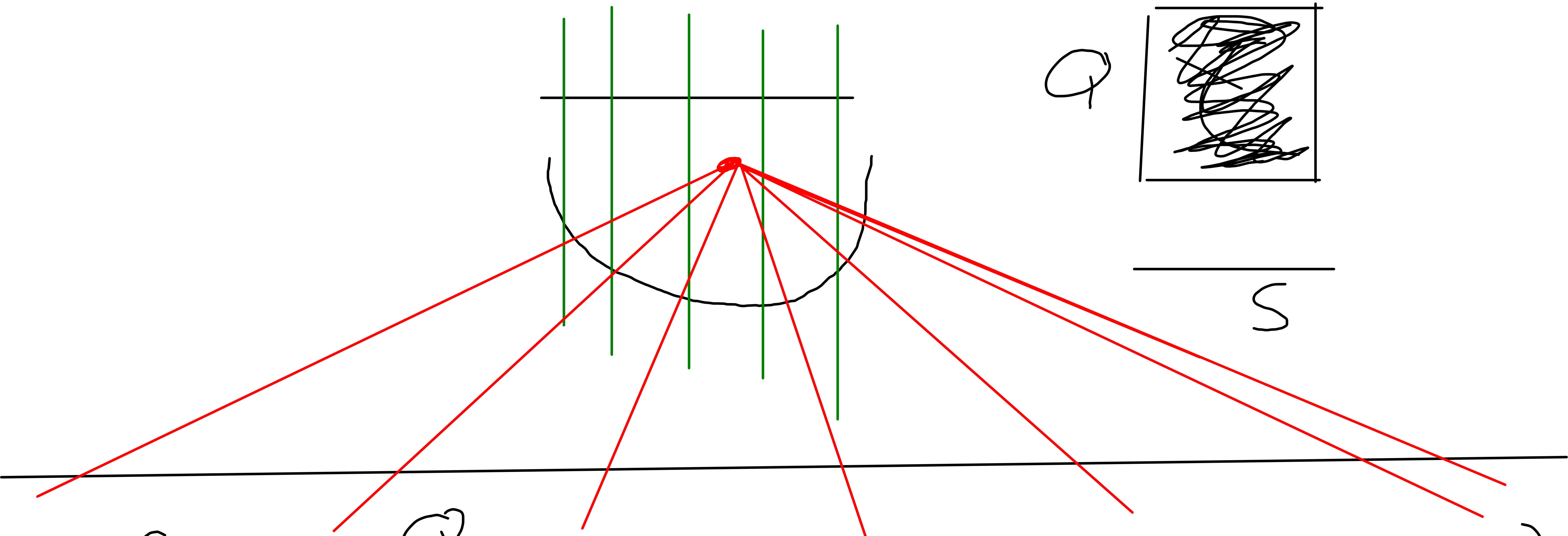
$$X^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -30 & 12 \\ -18 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$f : S \longrightarrow Q$$

$$a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \cdots \longmapsto (0.a_1 a_3 a_5 \cdots,\ 0.a_2 a_4 a_6 \cdots)$$