Se siamo in $\mathbb{R}^2$

il punto $P \equiv \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 5, & 7 \end{pmatrix}$ ha, nell'ampliamento

proiettivo, coordinate omogenee $\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1, & 5, & 7 \end{pmatrix}$

$\left(o\ (2, 10, 14),\ o\ (1000, 5000, 7000), \text{ecc.} \right)$

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{5000}{1000} \quad \text{ecc.}$$

$$Q \equiv \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right) \qquad Q \equiv \left(1, \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

$$(3, 1, 5)$$

In $\mathbb{R}^2$ $\quad r: x-5y+1=0 \quad s: 3x-15y-1=0$

interseco: $\begin{cases} x-5y=-1 \\ 3x-15y=1 \end{cases}$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 3 & -15 & 1 \end{pmatrix}$

A $\quad C$

$\text{rango}(A)=1$
$\text{rango}(C)=2$ $\Longrightarrow$ NO soluzioni

Passo nell'ampliamento proiettivo

$r: \frac{X_1}{X_0} - 5\frac{X_2}{X_0} + 1 = 0 \qquad \cancel{X_0}\frac{X_1}{\cancel{X_0}} - 5\frac{\cancel{X_0}X_2}{\cancel{X_0}} + X_0 = 0$

X_0°

ampliamenti proiettivi delle due rette affini

$\bar{r}: X_1 - 5X_2 + X_0 = 0 \qquad \bar{r}\cap\bar{s}: \begin{cases} X_0 + X_1 - 5X_2 = 0 \\ -X_0 + 3X_1 - 15X_2 = 0 \end{cases}$

$\bar{s}: 3X_1 - 15X_2 - X_0 = 0$

Trucco per risolvere sistemi lineari omogenei di n eq. indipendenti in $n+1$ incognite:

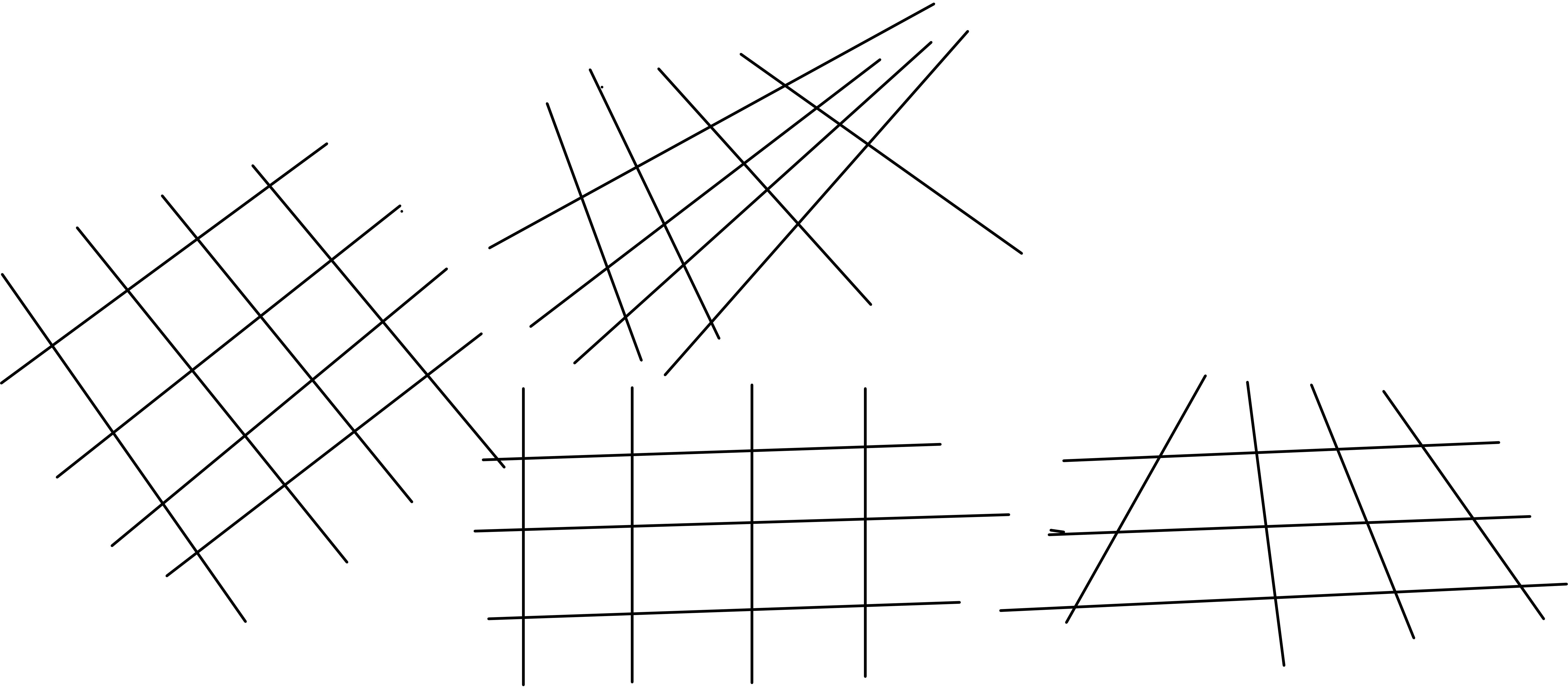
$$S: \begin{cases} a_0^1 X_0 + a_1^1 X_1 + \dots + a_n^1 X_n = 0 \\ \dots \\ a_0^n X_0 + a_1^n X_1 + \dots + a_n^n X_n = 0 \end{cases} \qquad \text{rango}\begin{pmatrix} a_0^1 & \dots & a_n^1 \\ a_0^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix} = n$$

Soluzione generale: $\lambda\left(|M_0|, -|M_1|, |M_2|, \dots, (-1)^n |M_n|\right)$,

dove M_i è il minore ottenuto cancellando la i-esima colonna

$$\begin{cases} X_0 + X_1 - 5X_2 = 0 \\ -X_0 + 3X_1 - 15X_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 \\ -1 & 3 & -15 \end{pmatrix} \quad \det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

punto di inters. $(\bar{X}_0, \bar{X}_1, \bar{X}_2) = \lambda\left(\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -15 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -15 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right) = \lambda \cdot (0, 20, 4)$



$x^2 - 6xy + 9y^2 - 4x + 5 = 0 \qquad x = \frac{X_1}{X_0} \qquad y = \frac{X_2}{X_0}$

$$X_0^2 \cdot \left(\frac{X_1^2}{X_0^2} - 6\frac{X_1 X_2}{X_0^2} + 9\frac{X_2^2}{X_0^2} - 4\frac{X_1}{X_0} + 5 \right) = 0$$

$$X_1^2 - 6X_1X_2 + 9X_2^2 - 4X_0X_1 + 5X_0^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix}5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_0 \\ X_1 \\ X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$$

solo sol ovvia

$W = \emptyset$

$$(X_0\, X_1\, X_2) \cdot \begin{array}{c|ccc} & X_0 & X_1 & X_2 \\ \hline X_0 & 5 & -2 & 0 \\ X_1 & -2 & 1 & -3 \\ X_2 & 0 & -3 & 9 \end{array} \cdot \begin{pmatrix}X_0 \\ X_1 \\ X_2\end{pmatrix}$$

A

$$|A| = \begin{vmatrix}5 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & 0\end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix}5 & -2 \\ 6 & 0\end{vmatrix} \neq 0$$

rango $A = 3$ non specializzata

Sia $W[f] \neq \emptyset$ Sia $\overline{P} = (\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_n) \in W$

Allora $A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Quindi

$$(\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{X}_1 \\ \vdots \\ \overline{X}_n \end{pmatrix} = (\overline{X}_1 \cdots \overline{X}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Perciò $\overline{P} \in \mathrm{Im}[f]$