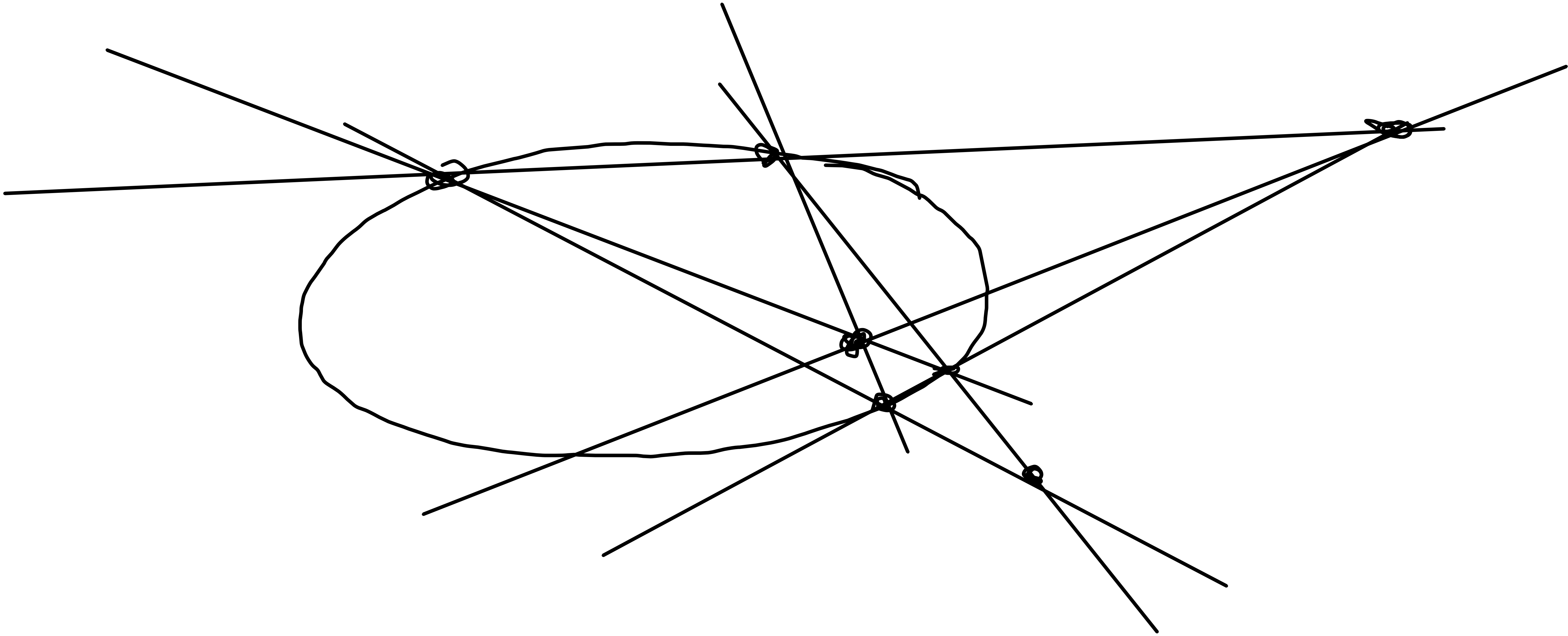
CORREZIONE : conica $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 9 \end{pmatrix}$

$S \equiv (1, 0, -3)$

$\tau(S) : 4 + 6x - \overset{28}{\cancel{27}}\, y = 0$



PROP- A simile ad $A' \Longrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A')$

$\det(A) = \det(A')$

$\text{pol.car.}(A) = \text{pol.car.}(A')$

PROP- Se A e A' sono diagonalizzabili per similitudine allora

A simile ad $A' \iff \text{pol.car.}(A) = \text{pol.car.}(A')$

TEOR- A simmetrica reale $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \exists\, E \in \underset{\text{ortogonale}}{O_n}$ e D diagonale tali che $A = E^{-1} D E =$

$= {}^tE \cdot D \cdot E$

dove sulla diagonale di D ci sono gli autovalori di A, ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità geometrica (che, in questo caso, è = molt. alg.)

Da adesso, le matrici sono simmetriche

PROP - A congruente ad A' $\Rightarrow$ $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A')$

PROP - $A \in M_n(\mathbb{C})$ (simmetrica) $\Rightarrow$ $\exists$ matrice diagonale D' congruente ad A

COR - $A \in M_n(\mathbb{C})$ (simm.) $\Rightarrow$ A è congruente a

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}}_{n-r} \end{pmatrix}$$

dove $r = \operatorname{rango}(A)$

forma canonica per congruenza di A

$$D' = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Costruisco

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sqrt{\frac{1}{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tE =$$

$${}^tE \cdot D' \cdot E = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\frac{1}{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sqrt{\frac{1}{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

DEF - Segnatura di una matrice reale simm.:

$\sigma = (\sigma_+, \sigma_-)$, dove $\underset{\sigma_-}{\sigma_+}$ è la somma delle molteplicità degli autovalori $\underset{<0}{>0}$

TEOR - A reale (simmetrica) $\Rightarrow$ A è congruente a

$$D = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix}\right\}r & & 0 \\ & \left.\begin{matrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1\end{matrix}\right\}s & \\ 0 & & \begin{matrix}0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0\end{matrix}\end{pmatrix}$$

dove $\sigma(A) = r, s$

forma canonica per congruenza di A

So che A è congruente a $D' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ 0 & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$

dove $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_{r+s} < 0$

Costruisco $E = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \sqrt{\frac{1}{\lambda_r}} & & & & & & \\ & & & \sqrt{\frac{1}{-\lambda_{r+1}}} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \sqrt{\frac{1}{-\lambda_{r+s}}} & & & \\ 0 & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$

$$
{}^tE \cdot D' \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+1}}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{r+s}}} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{r+s} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{}} & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}
$$

PROP - La relazione di congruenza è di equivalenza

COR - $A, A' \in M_n$ complesse

A congruente ad A' $\Longleftrightarrow$ A, A' hanno la stessa forma canonica

$\Longleftrightarrow$ rango(A) = rango(A')

COR - $A, A' \in M_n$ reali

A congruente ad A' $\Longleftrightarrow$ A, A' hanno la stessa forma canonica

$\Longleftrightarrow$ $\sigma(A) = \sigma(A')$

PROP − A reale simmetrica.
$\sigma(A) = (r, s)$ dove r è il numero di variazioni nel pol. caratteristico, s è il numero di permanenze

---

DEF − Segnatura di una forma quadratica reale: la segnatura di una sua matrice qualsiasi

---

PROP − q forma quadratica reale su V, $\dim V = n$

q è definita positiva $\iff \sigma(q) = (n, 0) \iff$ il pol. car. ha solo variazioni

q è definita negativa $\iff \sigma(q) = (0, n) \iff$ il pol. car. ha solo permanenze

(termine noto $\neq 0$)

TEOR - (Criterio di Sylvester) $A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica.

$M_1, \dots, M_n$ minori principali (cioè ottenuti intersecando righe e colonne aventi gli stessi indici) ognuno contenuto nell'altro. Allora

A risulta definita positiva $\iff |M_i| > 0 \quad \forall i$

A risulta definita negativa $\iff |M_i| \begin{array}{l} < 0 \text{ per i dispari} \\ > 0 \text{ per i pari} \end{array}$

altrimenti risulta indefinita (cioè né def. pos, né def. neg.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_1 = (1)$ $\det = 1 > 0$ $+$

$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ $\det = 7 > 0$ $+$ $\Longrightarrow$ A def. pos.

$M_3 = A$ $\det = 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 > 0$ $+$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$M_1 = (-5)$ $\det = -5 < 0$ $-$

$M_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ $\det = 15 > 0$ $+$ $\Longrightarrow$ A def. neg.

$M_3 = B$ $\det = -5 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -25 < 0$ $-$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -4 \\ 7 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$+$ $-$ $-$

$-$ $+$ $+$

CCR –

def. pos $\Longrightarrow$ diagonale tutta pos.

def. neg $\Longrightarrow$ diagonale tutta neg.

OSS - Una iperquadrica reale [f] (cioè in $\mathbb{P}$ su campo $\mathbb{R}$) ha immagine vuota $\iff$ f è definita positiva o def negativa

ATTENZIONE: quando faremo le classificazioni delle iperquadriche, dichiererò delle proprietà (proiettive) delle immagini, che NON dimostrerò (salvo un paio di casi). Il gusto della faccenda è che tali proprietà possono essere studiate nei "prototipi" semplici forniti dalle forme canoniche per congruenza, ma possono essere estese a tutte le iperquadriche proiettivamente equivalenti.

ESEMPIO: E' facile vedere che la conica di discriminante $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ha immagine $(X_0^2=0)$ costituita dalla sola retta $X_0=0$.

Più complicato sarebbe verificare la stessa proprietà (immagine costituita da una sola retta) se il discriminante è

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Ma rango$(A)=1$, perciò A è congruente a D e le due coniche sono proiettivament equivalenti