Classificazione delle iperquadriche di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Rango 1 $\quad \sigma = (1,0)$ o $(0,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \quad X_0^2 = 0$ Im: un punto (contato 2 volte) $\quad |A| = 0$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso punto

---

Rango 2

$\sigma = (2,0)$ o $(0,2)$ $\quad X_0^2 + X_1^2 = 0$ Im: $\emptyset$ $\quad |A| > 0$

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ W: $\emptyset$

$\sigma = (1,1)$ $\quad X_0^2 - X_1^2 = 0$ Im: insieme di 2 punti

$\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad (X_0 + X_1)(X_0 - X_1)$ $\quad |A| < 0$

W: $\emptyset$

OSS - Se A è il discriminante di un'iperq. $[f]$, allora il suo minore M_0^0 è il discriminante di $\mathrm{Im}[f] \cap \pi_\infty$

Es: conica

$$\cancel{a_0^0 X_0^2} + 2\cancel{a_1^0 X_0} X_1 + 2\cancel{a_2^0 X_0 X_2} + a_1^1 X_1^2 + 2a_2^1 X_1 X_2 + a_2^2 X_2^2 = 0$$

$X_0 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 \\ a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

Classificare le coniche
$2x^2+2\lambda xy+\lambda y^2+2x+1=0$
al variare di $\lambda\in\mathbb{R}$

$$2X_1^2+2\lambda X_1X_2+\lambda X_2^2+2X_1X_0+X_0^2=0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&\lambda\\0&\lambda&\lambda\end{pmatrix} \quad M_0^0$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&1&\lambda\\0&\lambda&\lambda\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&\lambda\end{vmatrix}=\lambda-\lambda^2=\lambda(1-\lambda)=0 \iff \lambda=0 \vee \lambda=1$$
deg.

$$A_0^0=|M_0^0|=\begin{vmatrix}2&\lambda\\\lambda&\lambda\end{vmatrix}=2\lambda-\lambda^2=\lambda(2-\lambda)$$
$\geq 0 \iff 0\leq\lambda\leq 2$

$M_1=(1)$ $\quad |M_1|=1>0$

$M_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$ $\quad |M_2|=1>0$

$M_3=A$ $\quad |M_3|=\lambda(1-\lambda)$

		0		1	
$\lvert M_1\rvert$	+	+	+	+	+
$\lvert M_2\rvert$	+	+	+	+	+
$\lvert M_3\rvert$	−	0	+	0	−

* det pos.

λ	$\lvert A\rvert$	$r(A)$	$\lvert M_0^0\rvert$	coniche
$\lambda<0$	$\neq 0$	3	−	iperboli
$\lambda=0$	$=0$	2	0	deg r = 2
$0<\lambda<1$	$\neq 0$	3	+	* ellissi immag.
$\lambda=1$	$=0$	2	+	deg r = 2
$1<\lambda<2$	$\neq 0$	3	+	* ellissi reali
$\lambda=2$	$\neq 0$	3	0	parabola
$\lambda>2$	$\neq 0$	3	−	iperboli

Dato un polinomio
$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$,
le EVENTUALI radici razionali sono del tipo
$\frac{r}{s}$, dove r è un divisore di a_0, s è un divisore di a_n