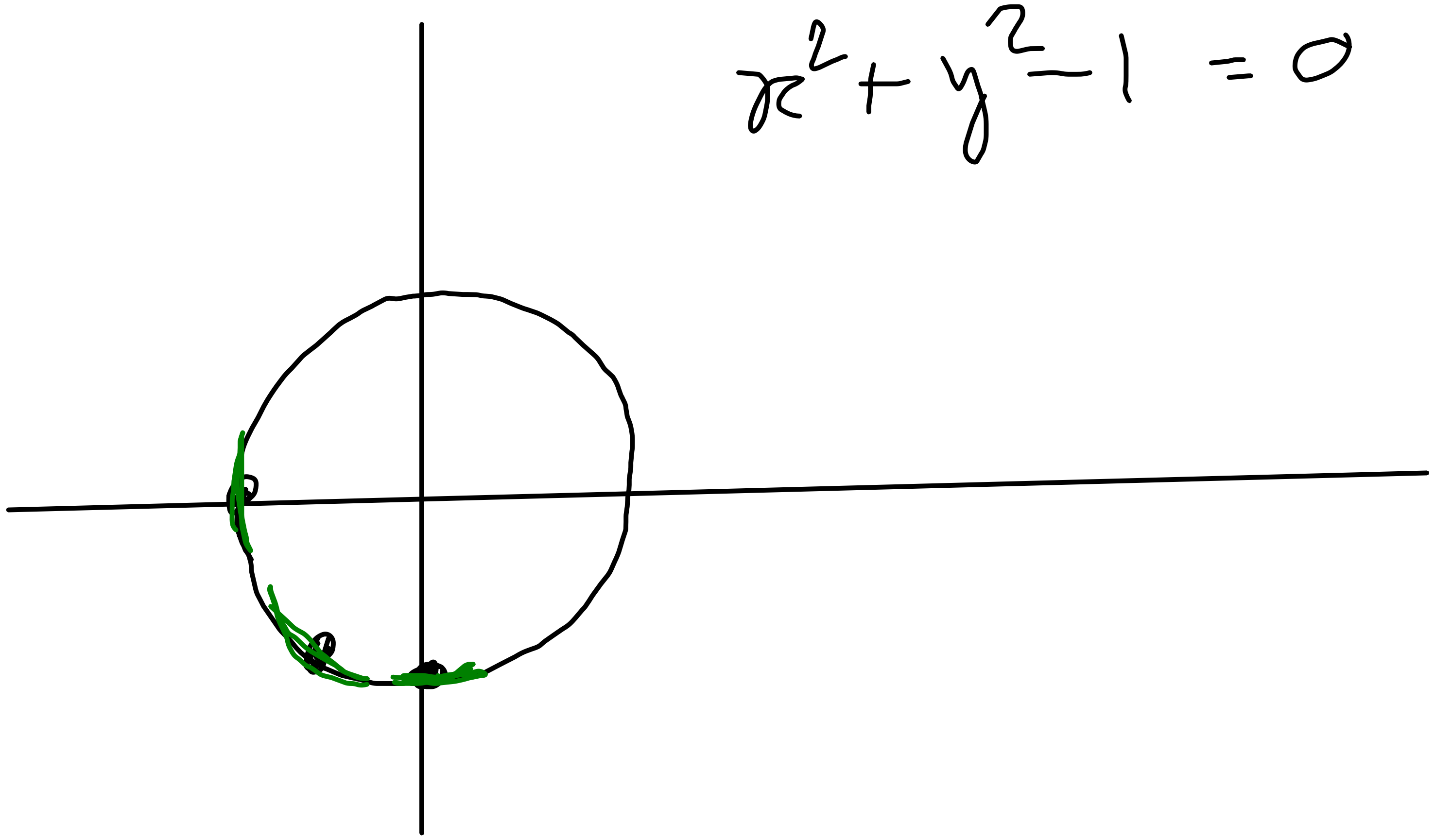
tang : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ $\qquad \dfrac{x - x_0}{1} = \dfrac{y - y_0}{f'(x_0)}$

$(l, m) \sim (1, f'(x_0))$

norm : $1(x - x_0) + f'(x_0)(y - y_0) = 0$

$x^2 + y^2 - 1 = 0$



$f(x,y)=0 \quad P_0=(x_0,y_0)$ dove $f'_y \neq 0$

In un opportuno intorno di P_0 la stessa curva si può esprimere come

$$y = F(x) \quad \text{con} \quad F'(x_0) = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}$$

La tangente in P_0 è dunque

$$y - y_0 = F'(x_0)(x - y_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{f'_x(x_0,y_0)}{f'_y(x_0,y_0)}(x - x_0)$$

$$f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0$$

$x_1 = x \quad x_2 = y \quad x_3 = 1$

$\overline{P} \equiv (\bar{x}, \bar{y})$ ottenuto per $u = \bar{u}$ $\left\{ \begin{array}{l} x = f_1(u) \\ y = f_2(u) \\ f_3(u) = 1 \end{array} \right.$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f_1(\bar{u}) & f_2(\bar{u}) & 1 \\ f_1'(\bar{u}) & f_2'(\bar{u}) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (x - f_1(\bar{u})) & (y - f_2(\bar{u})) & 0 \\ f_1(\bar{u}) & f_2(\bar{u}) & 1 \\ f_1'(\bar{u}) & f_2'(\bar{u}) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\left(\underbrace{(x - f_1(\bar{u}))}_{\bar{x}} f_2'(\bar{u}) - \underbrace{(y - f_2(\bar{u}))}_{\bar{y}} f_1'(\bar{u}) \right) = 0$$

$$(y - \bar{y}) f_1'(\bar{u}) - (x - \bar{x}) f_2'(\bar{u}) = 0$$

$$\frac{x - \bar{x}}{f_1'(\bar{u})} = \frac{y - \bar{y}}{f_2'(\bar{u})}$$

Trovare gli asintoti di

$C: 4x^2y - y^3 + 6xyt - 8yt^2 + 1t^3 = 0$

$f(t,x,y) =$ $t=0$

$$\begin{pmatrix} X_0 \leftrightarrow t \\ X_1 \leftrightarrow x \\ X_2 \leftrightarrow y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y(4x^2 - y^2) = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} y = 0 \\ y = 2x \\ y = -2x \end{matrix}$$

$f_t = 6xy - 16yt + 3t^2$

$f_x = 8xy + 6yt$

$f_y = 4x^2 - 3y^2 + 6xt - 8t^2$

	$P_{1\infty}$	$P_{2\infty}$	$P_{3\infty}$
f_t	0	12	-12
f_x	0	16	-16
f_y	4	-8	-8

$0t + 0x + 4y = 0$ $\quad P_{1\infty} \equiv (0, 1, 0)$

$y = 0$

$+12t + 16x - 8y = 0$ $\quad P_{2\infty} \equiv (0, 1, 2)$

$+3 + 4x - 2y = 0$

$-12t - 16x - 8y = 0$ $\quad P_{3\infty} \equiv (0, 1, -2)$

$3 + 4x + 2y = 0$

Es 4 $\mathcal{C}: y=x^2$ $\mathcal{C}': y=-x^3$. Trovare il luogo $\mathcal{L}$ dei punti d'intersezione delle tangenti a $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ in punti di uguale ascissa

---

$P_\alpha \equiv (\alpha, \alpha^2) \in \mathcal{C}$ $\quad Q_\alpha \equiv (\alpha, -\alpha^3) \in \mathcal{C}'$

tang. a $\mathcal{C}$ in P_α:

$t_\alpha: y-\alpha^2 = 2\alpha(x-\alpha)$

$y-\alpha^2 = 2\alpha x - 2\alpha^2$

$\alpha^2 - 2x\alpha + y = 0$

tang. a $\mathcal{C}'$ in Q_α

$y+\alpha^3 = -3\alpha^2(x-\alpha)$

$y+\alpha^3 = -3\alpha^2 x + 3\alpha^3$

$2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y = 0$

$$\mathcal{L}: \begin{cases} 2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y = 0 \\ \alpha^2 - 2x\alpha + y = 0 \end{cases}$$

$2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y \;|\; \alpha^2 - 2x\alpha + y$

$(-x-1)y + \alpha(2x^2 - 2y)$

$0 = \dfrac{y(4y^2 - 3x^2y + 6xy + y - 4x^3)}{4(y^2 - 2x^2y + x^4)}$

$4(y-x^2)^2$

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n = 0 \\ \vdots \\ a_1^{n-1} x_1 + \cdots + a_n^{n-1} x_n = 0 \end{cases}$$

Sol $= \lambda\left(|M_1|, -|M_2|, \ldots, (-1)^{n}|M_n|\right)$

M_i ottenuto cancellando la colonna i

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

sviluppo lungo la 1ª riga (quella aggiunta)

$a_1^1 |M_1| + a_2^1(-1)|M_2| \cdots\cdots = 0$

Allora $*$ è una soluzione della 1ª eq.

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdots$$

$*$ è sol. della 2ª eq ecc ecc.

Podaria di $\mathcal{C}: y = x^2$ da $A \equiv (3,0)$ $\quad P_\alpha \equiv (\alpha, \alpha^2)$

Es13

tang. t_α a $\mathcal{C}$ in P_α $\therefore$ $t_\alpha : y - \alpha^2 = 2\alpha(x-\alpha)$ $\quad \frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\alpha^2}{2\alpha}$

norm. a t_α da A : $n_\alpha : 1(x-3) + 2\alpha(y-0) = 0$

$$P \quad \begin{matrix} t_\alpha : \\ n_\alpha : \end{matrix} \begin{cases} \alpha^2 - 2x\alpha + y = 0 \\ 2y\alpha + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 - 2x\alpha + y \;\Big|\; \frac{2y\alpha + x - 3}{\ }$$

$$\frac{4y^3 + 4x^2y - 12xy + x^2 - 6x + 9}{4y^2} = 0$$

Curva $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$ $\quad \bar{P} \longleftrightarrow \bar{u}$

$$\bar{P} \equiv \left(f(\bar{u}), \varphi(\bar{u}), \psi(\bar{u}) \right)$$

tang. a $\mathcal{C}$ in $\bar{P}$: $\dfrac{x - f(\bar{u})}{f'(\bar{u})} = \dfrac{y - \varphi(\bar{u})}{\varphi'(\bar{u})} = \dfrac{z - \psi(\bar{u})}{\psi'(\bar{u})}$

piano normale a $\mathcal{C}$ in $\bar{P}$: $f'(\bar{u}) \cdot \left(x - f(\bar{u}) \right) + \varphi'(\bar{u}) \cdot \left(y - \varphi(\bar{u}) \right) + \psi'(\bar{u}) \cdot \left(z - \psi(\bar{u}) \right) = 0$

$$C : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^2 \\ z = \alpha^3 \end{cases} \qquad \overline{P} \equiv (2, 4, 8) \qquad \updownarrow \qquad \alpha = 2$$

tang. in $\overline{P}$: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-8}{12}$

Piano norm. in $\overline{P}$: $1(x-2) + 4(y-4) + 12(z-8) = 0$

$$x + 4y + 12z - 114 = 0$$

I metodo per sapere se $\mathcal{C}: \begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$ è piana.

Considero il generico piano $\underbrace{ax + by + cz + d}_{F(x,y,z) :=} = 0$

Formo la funzione composta $\Phi(u) = F(f(u), \varphi(u), \psi(u)) = a f(u) + b \varphi(u) + c \psi(u) + d$

e impongo che sia identicamente nulla in u:

se ottengo una quaterna (a, b, c, d) con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, questa determina il piano contenente $\mathcal{C}$, altrimenti $\mathcal{C}$ è sghemba

$$C : \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\Phi(u) = au + bu^2 + cu^3 + d$$

$\Phi(u) = 0 \ \forall u \iff$ tutti i coefficienti sono $= 0$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow C$ è sghemba

Es 5

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases} \qquad ax + by + cz + d = 0$$

$$\Phi(u) = a(u^3 - 6u^2) + b(3u) + c(u-1) + d =$$

$$= au^3 - 6au^2 + 3bu + cu - c + d =$$

$$= au^3 - 6au^2 + (3b + c)u - c + d$$

$$= 0 \ \forall u \iff \begin{cases} a = 0 \\ -6a = 0 \\ 3b + c = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ c = k \\ b = -\frac{k}{3} \\ d = k \end{cases}$$

pongo

Il piano contenente $\mathcal{C}$ è: $0x + \left(-\frac{k}{3}\right)y + kz + k = 0$

con $k \neq 0$, per esempio $-y + 3z + 3 = 0$