In $\mathbb{RP}^3$ siano $A=[(1,0,1,0)]$, $B=\cancel{[(1,1,1,1)]}$, $C=[(0,1,0,1)]$

Si scriva, in forma cartesiana, il sottospazio di minima dimensione passante per A, B, C.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M \qquad |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad |O_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad |O_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

rango $= 2$

$$\begin{pmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

impongo rango $= 2$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x_0 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rango $= 2$

$\dim \mathcal{P} = 3 - 2 = 1$

$$\begin{array}{ccc}
V \quad \mathcal{B} \text{ base ordinata} & \mathcal{A} \quad \mathcal{R} \text{ rif. affine} & (V, \langle , \rangle) \quad \mathcal{B} \text{ base orton.} \\
\downarrow \Phi_{\mathcal{B}} & \downarrow \Phi_{\mathcal{R}} & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\
\mathbb{R}^n \text{ sp. vettoriale} & \mathbb{R}^n \text{ sp. affine} & (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{nat})
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathbb{P} \quad \mathcal{G} \text{ rif. proiett.} \\
\downarrow \Phi_{\mathcal{G}} \\
\mathbb{R}\mathbb{P}^n
\end{array}$$

In uno sp. proiettivo $\mathbb{P}$, rispetto a un dato rif. proiett. $\mathcal{G}$, siano $A_0 \equiv_{\mathcal{G}} (2,1)$, $A_1 \equiv_{\mathcal{G}} (3,2)$, $U \equiv_{\mathcal{G}} (0,-3)$.

a) Si verifichi che $\overline{\mathcal{G}} = (A_0, A_1, U)$ è un riferimento pro.

b) Si trovi una base $\mathcal{B}$ normalizzata rispetto ad $\overline{\mathcal{G}}$

c) Dato il punto $P \equiv_{\mathcal{G}} (50, 40)$, se ne trovino le coordinate rispetto ad $\overline{\mathcal{G}}$.

---

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓

$\overline{\mathcal{G}}$ è un rif. pro.

b) $A_0 \equiv_{\mathcal{G}} (2,1)$ $\quad A_1 \equiv_{\mathcal{G}} (3,2)$ $\quad U \equiv_{\mathcal{G}} (0,-3)$

$v_0 =$ $\quad v_1 =$ $\quad u =$

Cerco α, β per cui $\alpha v_0 + \beta v_1 = u$ $\quad \alpha(2,1) + \beta(3,2) = (0,-3)$

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = -3 \end{cases} \quad \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \quad \begin{cases} -\beta = 6 \\ \alpha + 2\beta = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -6 \\ \alpha = -3 - 2\beta = -3 + 12 = 9 \end{cases}$$

$\tilde{v}_0 = \alpha v_0 = 9(2,1) = (18,9)$ $\quad \tilde{v}_1 = \beta v_1 = -6(3,2) = (-18,-12)$

$\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1)$ è una base normalizzata risp. a $\tilde{\mathcal{G}}$

c) $P \equiv_{\mathcal{G}} (50,40)$ Cerco le componenti (x,y) di v risp. a $\tilde{\mathcal{B}}$

$v =$

$$x(18,9) + y(-18,-12) = (50,40) \quad \begin{cases} 18x - 18y = 50 \\ 9x - 12y = 40 \end{cases} \quad \mathrm{I} - 2\mathrm{II} \quad \begin{cases} 6y = -30 \\ 9x - 12y = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ 9x = 40 - 60 = -20 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -5 \\ x = -\frac{20}{9} \end{cases} \quad P \equiv_{\mathcal{G}} \left(-\frac{20}{9}, -5\right) \sim (20,45) \sim (4,9)$$

Es.: Sia V lo sp. vett. dei polinomi in x, a coefficienti reali, di grado ≤ 2; sia $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ una sua base ordinata.

Sia poi $T: V \longrightarrow V$ che risulta lineare

$$p(x) \longmapsto -3\,p(x) + x\,p'(x)$$

Si scriva la matrice $M = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$ che rappresenta T rispetto alla base $\mathcal{B}$ sia nel dominio sia nel codominio

---

$$1 \longmapsto -3 \cdot 1 + x\,0 = -3 = -3 \cdot 1 + 0x + 0x^2 \equiv_{\mathcal{B}} (-3, 0, 0)$$

$$x \longmapsto -3 \cdot x + x \cdot 1 = -2x = 0 \cdot 1 - 2 \cdot x + 0x^2 \equiv_{\mathcal{B}} (0, -2, 0)$$

$$x^2 \longmapsto -3x^2 + x(2x) = -x^2 = 0 \cdot 1 + 0x - 1x^2 \equiv_{\mathcal{B}} (0, 0, -1)$$

$$M = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$p(x) = 5 - 2x + x^2 \equiv_{\mathcal{B}} (5, -2, 1)$$

$$T(p(x)) \equiv_{\mathcal{B}} M \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad T(p(x)) = -15 + 4x - x^2$$

TEOR (fondamentale delle trasf. lineari)

Dati sp. vett. V, W, data una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V, data una qualunque applicazione $f : \mathcal{B} \to W$ esiste ed è unica la trasf. lin. $T : V \to W$ tale che $T|_{\mathcal{B}} = f$, cioè tale che

$$T(v_1) = f(v_1)$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = f(v_n)$$

Es: siano $V = \{\text{pol. di gr.} \leq 1\}$, $W = \{\text{pol. di gr.} \leq 2\}$

$\mathcal{B} = (1, x)$ $\qquad$ $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$

Dati $p_1(x) = 1 + 2x$, $p_2(x) = 1 + 3x \in V$

$q_1(x) \overset{\mathcal{B}'}{\equiv} (1,-1,1)$, $q_1(x) = 1 - x + x^2$, $\quad q_2(x) \overset{\mathcal{B}'}{\equiv} (5,1,1)$, $q_2(x) = 5 + x + x^2 \in W$

Si trovi $T: V \to W$ t.c. $T(p_1(x)) = q_1(x)$, $T(p_2(x)) = q_2(x)$

scrivendone la matrice M risp. a $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$

Mi chiedo: $\overline{\mathcal{B}} = (p_1(x), p_2(x))$ è una base di V? Sì. $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $|X| = 1 \neq 0$

$p_1(x) \overset{\mathcal{B}}{\equiv} (1,2)$, $p_2(x) \overset{\mathcal{B}}{\equiv} (1,3)$

$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Y}$$

$$M = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M \cancel{X} \cdot \cancel{X^{-1}} = Y \cdot X^{-1} \qquad X^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

PROBL - Siano $\mathbb{P}$ con rif. pro. $\mathcal{R}$, $\mathbb{P}'$ con rif. pro $\mathcal{R}'$.
In $\mathbb{P}$ sia $\bar{\mathcal{R}} = (A_0, A_1, U)$ con $A_0 \equiv_{\mathcal{R}} (2,1)$, $A_1 \equiv_{\mathcal{R}} (3,2)$, $U \equiv_{\mathcal{R}} (0,-3)$
In $\mathbb{P}'$ sia $\bar{\mathcal{R}}' = (A_0', A_1', U')$ con $A_0' \equiv_{\mathcal{R}'} (1,1)$, $A_1' \equiv_{\mathcal{R}'} (1,2)$, $U' \equiv_{\mathcal{R}'} (4,7)$
Verificato che $\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{R}}'$ sono riferimenti proiettivi dei rispettivi spazi, si scriva la matrice M della proiettività $\omega : \mathbb{P} \to \mathbb{P}'$ tale che
$\omega(A_0) = A_0'$, $\omega(A_1) = A_1'$, $\omega(U) = U'$.

$\bar{\mathcal{R}}$: già fatto.

$\bar{\mathcal{R}}'$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$ ✓ rif. pro.

Mi procuro basi normalizzate $\tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{B}}'$ rispetto ad $\bar{\mathcal{R}}, \bar{\mathcal{R}}'$.

$$\tilde{\mathcal{B}}' = \Big(\underbrace{(18,9)}_{\tilde{v}_0 =} , \underbrace{(-18,-12)}_{\tilde{v}_1 =} \Big)$$

$\underbrace{A'_0 = (1,1)}_{w_0 =}$ $\quad \underbrace{A'_1 = (1,2)}_{w_1 =}$ $\quad \underbrace{v' = (4,7)}_{w =}$ $\quad$ Cerco γ, δ tali che

$$\gamma w_0 + \delta w_1 = w \qquad \gamma(1,1) + \delta(1,2) = (4,7) \qquad \begin{cases} \gamma + \delta = 4 \\ \gamma + 2\delta = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma + \delta = 4 \\ \delta = 3 \end{cases} \; \mathrm{II} - \mathrm{I} \qquad \begin{cases} \gamma = 4 - \delta = 4 - 3 = 1 \\ \delta = 3 \end{cases}$$

$$\tilde{w}_0 = \gamma w_0 = 1(1,1) = (1,1) \qquad \tilde{w}_1 = \delta w_1 = 3(1,2) = (3,6)$$

$$\tilde{\mathcal{B}}' = \big((1,1), (3,6) \big)$$

Trova la tr. lin. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $T(\tilde{v}_0) = \tilde{w}_0$, $T(\tilde{v}_1) = \tilde{w}_1$

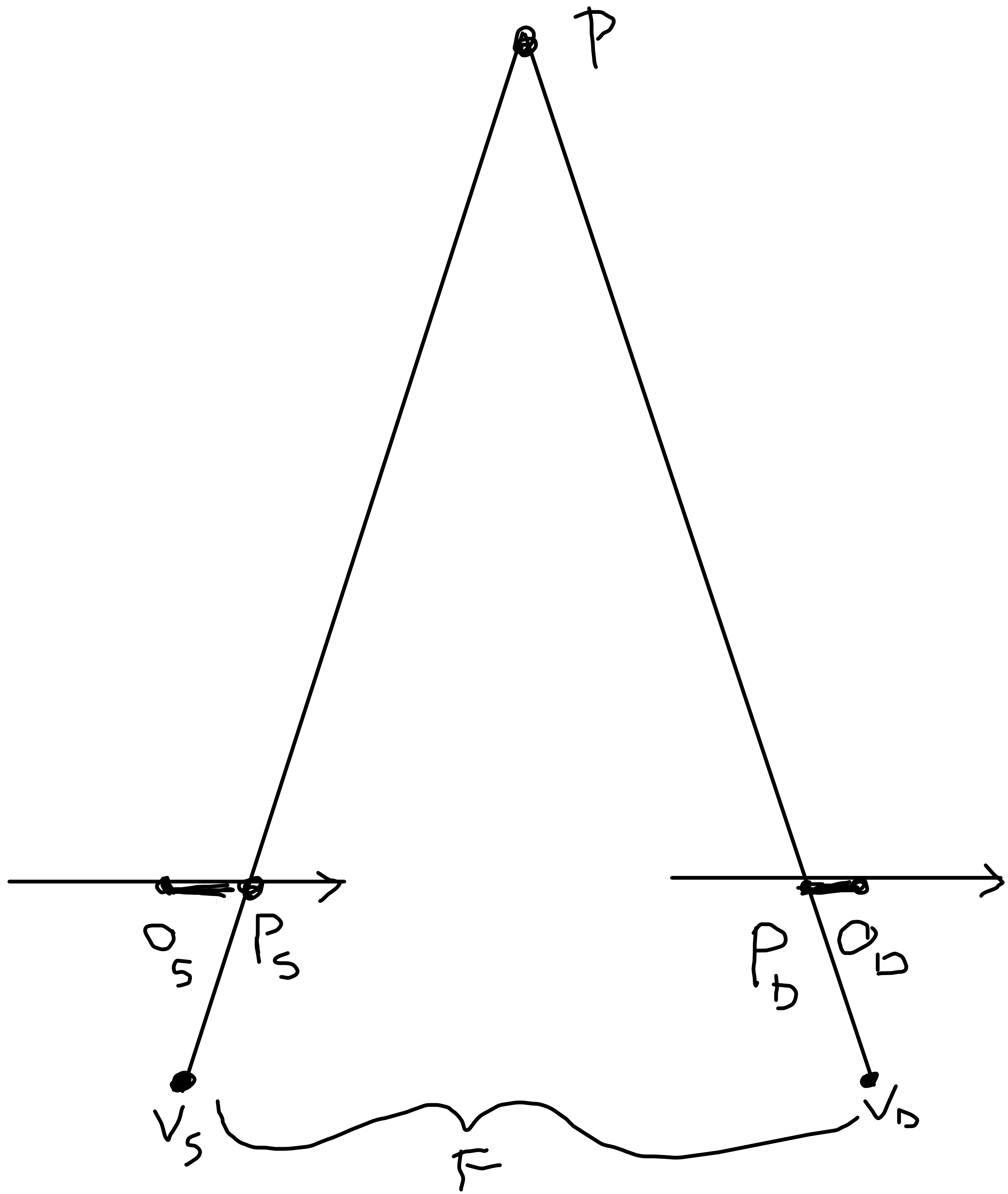
$$M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 18 & -18 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad M = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/9 & -1/3 \\ 1/6 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/18 & -\frac{4}{3} \\ 11/9 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 & -24 \\ 22 & -42 \end{pmatrix}$$

W:

$$\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 13/18 & -4/3 \\ 11/9 & -7/3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$


P
O_S
P_S
P_D
O_D
V_S
V_D
F