Iperpiano (di qualunque tipo di spazio n-dim) è un sottospazio (n-1)-dim.

Nello spazio affine (o euclideo) rispetto a un riferimento affine:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

non tutti nulli

Nello sp. vettoriale n-dim., rispetto a una base:

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

non tutti nulli

Possiamo ridefinire un iperpiano vettoriale come una classe di "proporzionalità" di forme lineari non nulle.

Cos'è una forma lineare su $\mathbb{R}^n$?

è una trasf. lineare da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$.

PROP - Tutte le forme lineari su $\mathbb{R}^n$ sono del tipo

(funzione polinomiale omogenea di 1° grado)

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

Le forme lineari su $\mathbb{R}^n$ si sommano e si moltiplicano per scalare come ogni altra funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$. Formano sp. vett.: $(\mathbb{R}^n)^*$

Nel proiettivo: idem, con una dimensione in più

Iperpiano: classe di proporzionalità di forme lineari non nulle:

$$a_0X_0 + a_1X_1 + \dots + a_nX_n$$

non tutti nulli

a meno di un fattore moltiplicativo,

cioè questo e $5a_0X_0 + 5a_1X_1 + \dots + 5a_nX_n$

sono rappresentanti dello stesso iperpiano

Due insiemi si dicono equipotenti se $\exists$ almeno una applicazione biiettiva fra loro. Una possibile definizione di insieme infinito: un insieme equipotente ad un suo sottoinsieme proprio.

Es. $f: \mathbb{N} \longrightarrow \text{Pari} \subsetneqq \mathbb{N}$

$n \longmapsto 2n$

Possiamo definire numero una classe di equipotenza di insiemi

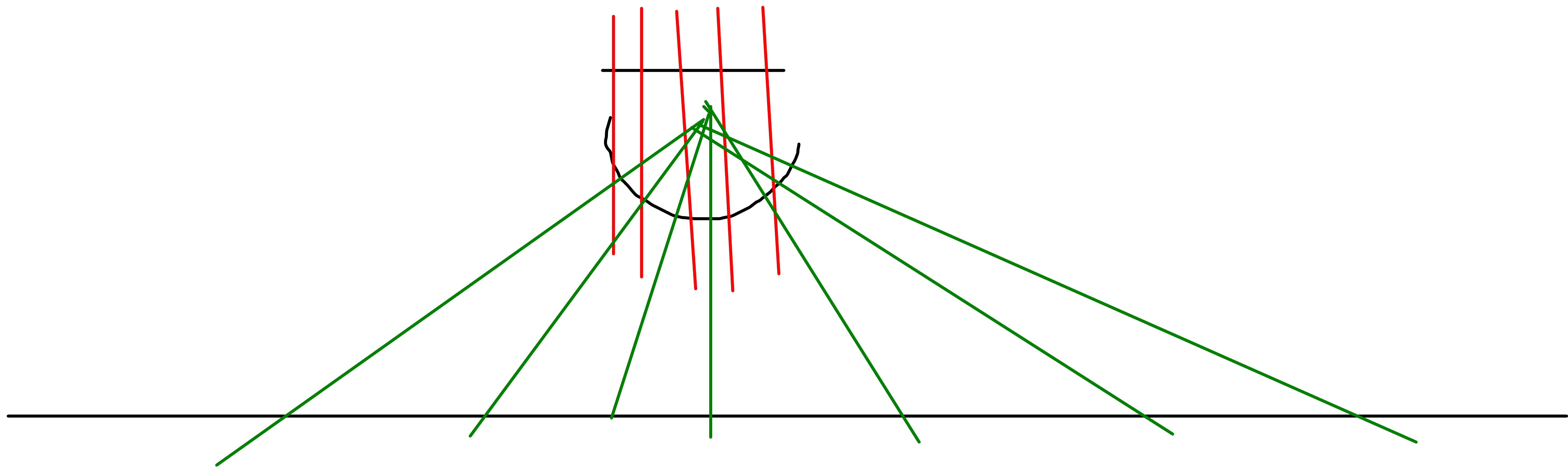
C'è un primo numero
una prima cardinalità infinito:

la classe di equipotenza di $\mathbb{N}$.

Gli insiemi equipotenti ad $\mathbb{N}$ si dice che
hanno cardinalità numerabile
potenza

Gli insiemi che sono equipotenti ad $\mathbb{R}$
si dice che hanno cardinalità del continuo
potenza

Un segmento aperto e una retta hanno la stessa potenza del continuo?



Dati insiemi A, B, dico che $|A| \leq |B|$

cardinalità
potenza

se $\exists$ applicazione iniettiva da A a B

Si può dimostrare: $|B| \geq |A|$ se $\exists$ applicazione suriettiva da B ad A

$A = \{$razionali positivi$\}$ $B = \mathbb{N}$

$|B| \leq |A|$ $f : B \to A$

$n \mapsto \frac{n}{1}$

Dimostro $|B| \geq |A|$; costruisco un'applicazione suriettiva da B ad A

$$
\begin{array}{cccc}
1\ \frac{1}{1} & \frac{2}{1}\ 2 & \frac{3}{1}\ 6 & \cdots \\[2ex]
3\ \frac{1}{2} & 5\ \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \\[2ex]
4\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} &
\end{array}
$$

$$\Longrightarrow \quad |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$$

Si può dimostrare

$$|\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}|$$

Un segmento è equipotente a un quadrato, a un cubo, ecc.

Segm. $]0,1[$ Quadr. $]0,1[\times]0,1[$

$$0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \longmapsto \left(0.a_1 a_3 a_5 \ldots ,\ 0.a_2 a_4 a_6 \ldots \right)$$

Mostro che nessuna applicazione $f: \mathbb{N} \to]0,1[$ può essere suriettiva.

binari: o zero o uno

Sia $f: \mathbb{N} \to]0,1[$

$1 \longmapsto 0.a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \ldots$

$2 \longmapsto 0.b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 \ldots$

$3 \longmapsto 0.c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 \ldots$

$4 \longmapsto 0.d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 \ldots$

Il numero $0.x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$

$x_1 \neq a_1,\ x_2 \neq b_2,\ x_3 \neq c_3,\ x_4 \neq d_4 \ldots$

non è immagine di nessun n quindi f non è suriettiva

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b = 0 \qquad x_i = \frac{X_i}{X_0}, \quad X_0 \neq 0$$

$$X_0 \cdot \left(a_1\frac{X_1}{X_0} + \dots + a_n\frac{X_n}{X_0} + b\right) = 0$$

$$a_1X_1 + \dots + a_nX_n + bX_0 = 0$$

Piano affine $r: 2x - 3y + 1 = 0$ $\quad s: 4x - 6y + 5 = 0$

$$r \cap s : \begin{cases} 2x - 3y + 1 = 0 \\ 4x - 6y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -6 & -5 \end{array}\right)}_{A,\ C}$$

$|A| = 0 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 1$

$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rg} C = 2$

Allora ampliam. pro.:

$$\begin{cases} 1X_0 + 2X_1 - 3X_2 = 0 \\ 5X_0 + 4X_1 - 6X_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$(X_0, X_1, X_2) \sim \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \right) = (0, -9, -6) \sim (0, 3, 2)$$

Caso particolarissimo:

$ax + by = 0 \qquad (a, b) \neq (0, 0)$

(a, b)

sol.: $\{(b, -a)\}$

Perciò: numeri direttori della retta r del piano $r: 5x + 7y - 3 = 0$ $\quad \vec{r}: 5x + 7y = 0$

Spazio dei suoi vettori liberi

Base per $\vec{r}$: $\{(7, -5)\}$

numeri direttori di r