$$x^2+y^2+1=0 \qquad x=\frac{X_1}{X_0} \quad y=\frac{X_2}{X_0}$$

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2+\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2+1=0 \quad \cdot X_0^2$$

$$X_1^2+X_2^2+X_0^2=0$$

$$x^2-2xy+2y^2-6x+1=0$$

$$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2-2\frac{X_1}{X_0}\frac{X_2}{X_0}+2\left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2-6\frac{X_1}{X_0}+1=0 \quad \cdot X_0^2$$

$$X_1^2-2X_1X_2+2X_2^2-6X_1X_0+X_0^2=0$$

$$\cancel{x^2-2xy+2y^2-6xt+t^2=0}$$

Ricorda:
Le forme quadratiche su $\mathbb{K}^n$ sono o la forma nulla o funzioni polinomiali omogenee di 2° grado

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 6x + 1 = 0$$

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + 2X_2^2 - 6X_1X_0 + X_0^2 = 0$$

$$\cancel{x^2 - 2xy + 2y^2 - 6xt + t^2 = 0}$$

$$(X_0\ X_1\ X_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} =$$

$$(Y_0\ Y_1\ Y_2)$$

Iperq. $[f]$ di discriminante $A = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_n^0 \\ \vdots & & \\ a_0^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$ ${}^tA = A$

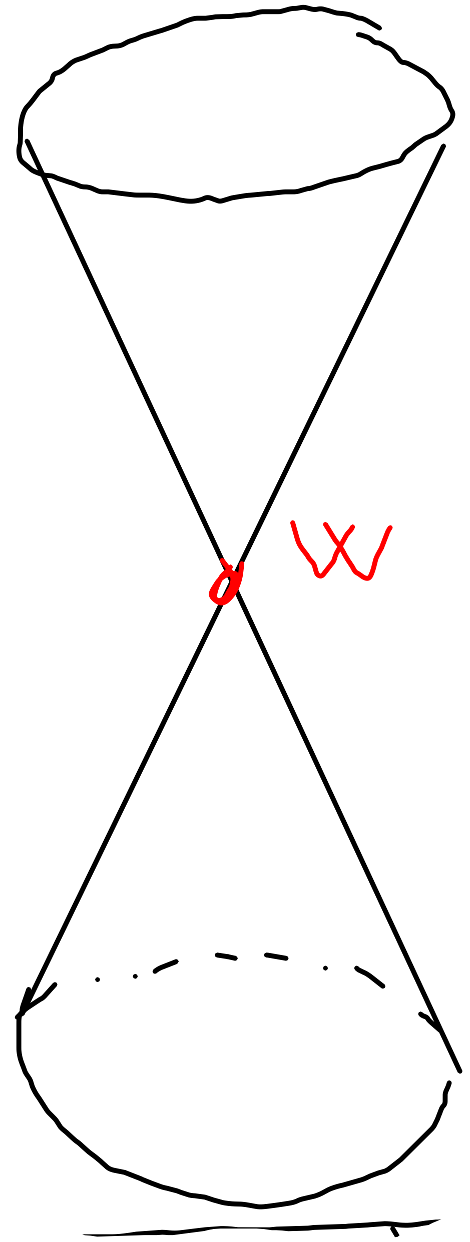
$W[f]: A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

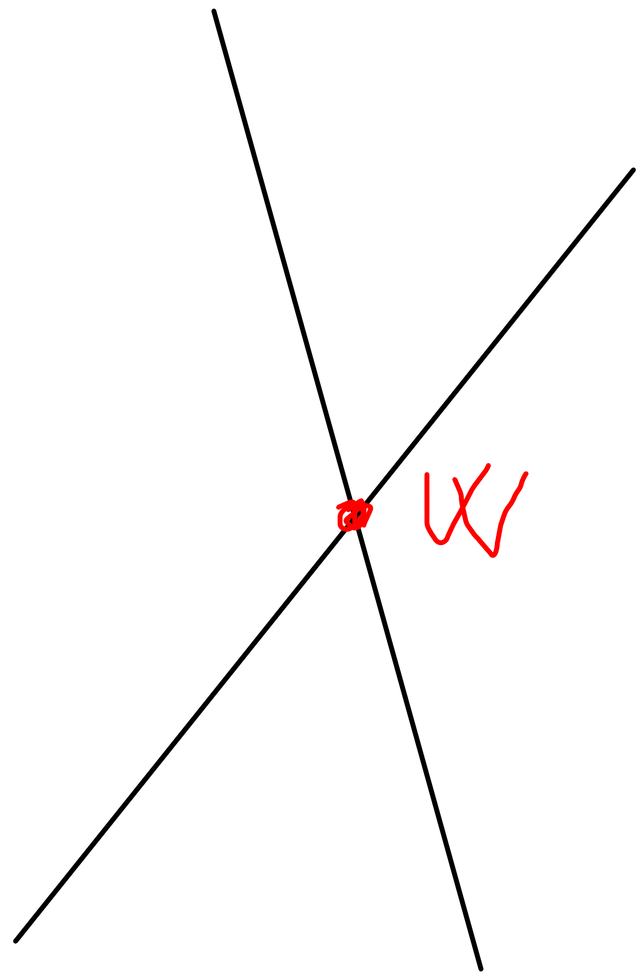
Sia $P = (\overline{Y}) \in W[f]$ allora $A \cdot \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

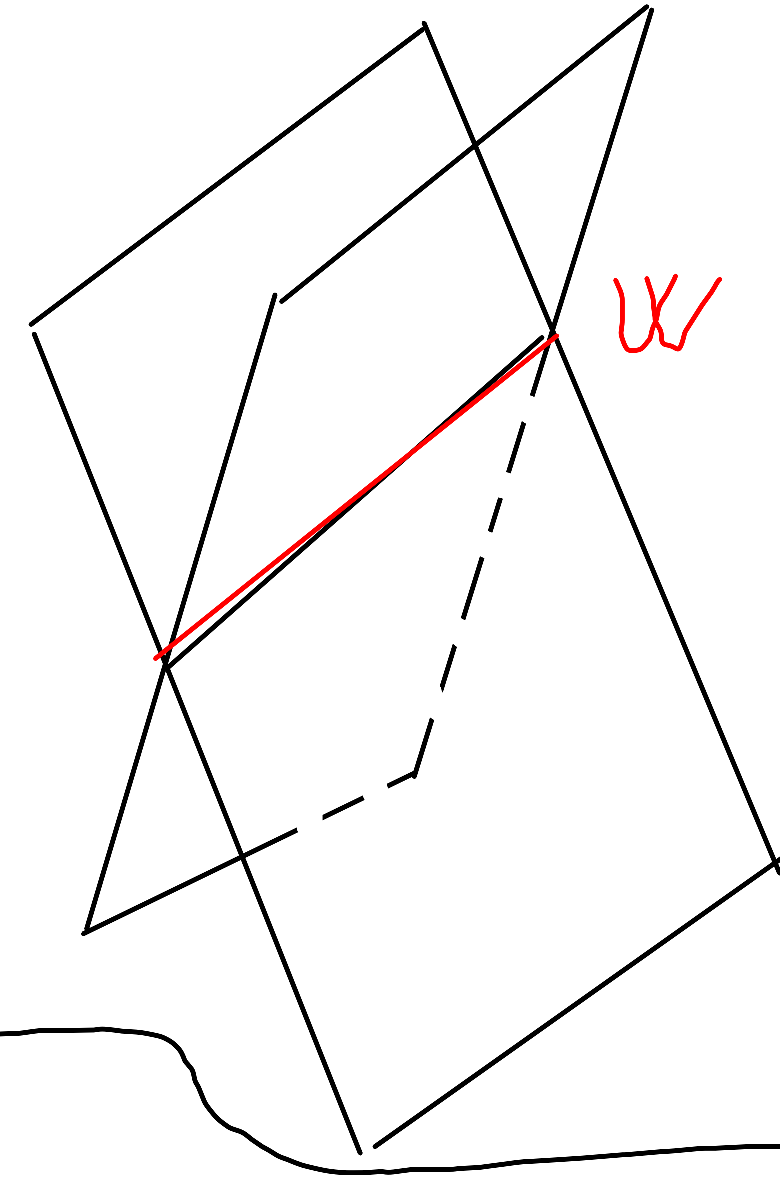
Ma allora

$$(\overline{Y}_0 \cdots \overline{Y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix} = (\overline{Y}_0 \cdots \overline{Y}_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

quindi $P \in \mathrm{Im}[f]$


W


W


W

IMPORTANTE $\quad \underline{A = {}^tA}$

$$\boxed{(y_0 \cdots y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = (z_0 \cdots z_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

Infatti:

$$(y_0 \cdots y_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = {}^t\left((z_0 \cdots z_n) \cdot {}^tA \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) =$$

$${}^t(y) \cdot A \cdot (z) \qquad {}^t(z) \cdot {}^tA \cdot {}^t(y)$$

$$= {}^t\left(\underbrace{(z_0 \cdots z_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{1 \times 1} \right) = (z_0 \cdots z_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

La trasposta di una matrice 1×1 è la matrice stessa

Cerco l'insieme dei punti $Q \equiv (X_0, \dots, X_n)$ coniugati a $P \equiv (\overline{Y}_0, \dots, \overline{Y}_n)$: sono dati dalle soluzioni di

$$(\overline{Y}_0 \dots \overline{Y}_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} X_0 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = 0$$

cioè $(X_0 \dots X_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_n \end{pmatrix}$ *

Quanto vale questo prodotto?

$$* \; A \cdot \begin{pmatrix} \overline{Y}_0 \\ \vdots \\ \overline{Y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

caso 1) $\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ allora $P \in V[f]$, l'equazione diventa $(X_0 \dots X_n) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ cioè un'identità: soddisfatta da OGNI punto

caso 2) almeno un $b_i \neq 0$

l'equazione $(X_0 \dots X_n) \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = 0$, cioè $b_0 X_0 + \dots b_n X_n = 0$ rappresenta un iperpiano

Iperq. $[f]$ discr. A; $P = (\overline{Y})$, $Q = (\overline{Z}) \notin W[f]$

$\tau(Q) : {}^t(\overline{Z}) \cdot A \cdot (X) = 0 \qquad \tau(P) : {}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (X) = 0$

$P \in \tau(Q) \iff$ $(\overline{Y})$ soddisfano ${}^t(\overline{Z}) \cdot A \cdot (X) = 0 \iff$

${}^t(\overline{Z}) \cdot A \cdot (\overline{Y}) = 0 \iff {}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (\overline{Z}) = 0 \iff$

$\iff$ $(\overline{Z})$ soddisfano ${}^t(\overline{Y}) \cdot A \cdot (X) = 0 \iff$

$\iff Q \in \tau(P)$

Dato $P \notin W[f]$, $W[f] \subseteq \tau(P)$

DIM - Il coniugio fra punti è simmetrico. Ogni punto (quindi anche P) è coniugato a ogni punto di $W[f]$, perciò ogni punto di $W[f]$ è coniugato a P, perciò è anche elemento di $\tau(P)$.

$P \in \tau(P) \iff P \in Im[f]$

$\overline{\text{DIM} - }$ $P \equiv (\bar{Y})$

$P \in \tau(P) \iff (\bar{Y})$ soddisfano ${}^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (X) = 0 \iff$

$\iff {}^t(\bar{Y}) \cdot A\,(\bar{Y}) = 0 \iff P \in Im[f]$

$y = x^2$