Dato un endomorfismo $T: V \to V$ che, risp. alla base $\mathcal{B}$ sia rappresentato da $A \in M_n$, il polinomio caratteristico di T (e di A) è:

$\det(\lambda I_n - A)$, pol. di grado n in λ.

PROP - Gli autovalori di T (e di A) sono tutte e sole le radici del polinomio caratteristico

PROP - L'autospazio relativo a un autovalore $\bar{\lambda}$ è rappresentato dal sistema omogeneo

$$(\bar{\lambda} I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sia $\bar{\lambda}$ un autovalore di T.

DEF - Molteplicità algebrica di $\bar{\lambda}$ è la molteplicità di $\bar{\lambda}$ come radice del pol. car.

DEF - Molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$ è la dimensione del suo autospazio

PROP - $m.g.(\bar{\lambda}) = n - \text{rango}(\bar{\lambda} I_n - A)$

PROP - $1 \leq m.g.(\bar{\lambda}) \leq m.a.(\bar{\lambda})$

PROBLEMA: Trovare basi rispetto a cui endomorfismi e forme quadratiche siano rappresentate in modo "semplice"

DEF - $A \in M_n$ si dice diagonalizzabile per similitudine se $\exists D \in M_n$ diagonale simile ad A.

TEOR - $A \in M_n$ è diagonalizzabile per similitudine

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{\lambda \text{ autovalore di } A} m.g(\lambda) = n$$

PROP - Se A è diagonalizzabile per similit. ogni D diagonale simile ad A presenta sulla diagonale gli autovalori di A, ognuno tante volte quant'è la sua m.g.

PROP - Se A è diagonalizzabile per similit., allora per ogni suo autovalore $\bar{\lambda}$, $mg(\bar{\lambda}) = ma(\bar{\lambda})$.

TEOR - OGNI matrice simmetrica è diagonalizzabile per similitudine mediante una matrice E ortogonale.

Dato un polinomio in x a coefficienti reali, di gr. n e termine noto $\neq 0$

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$$a_0 \neq 0 \qquad a_n \neq 0$$

considero la $(n+1)$-pla dei coefficienti $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$; agli eventuali $a_i = 0$ assegno arbitrariamente segno + o −.

variazione

Chiamo permanenza ogni coppia di coefficienti

di segno opposto

consecutivi dello stesso segno.

TEOR (Hariot-Cartesio semplificato) Sia $p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$ un polinomio a coeff. reali, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, che non abbia radici complesse a parte immaginaria non nulla.

La somma delle molteplicità delle radici positive è = al n. di variazioni.

La somma delle molteplicità delle radici negative è = al n. di permanenze

---

NOTA - I polinomi caratteristici di matrici simmetriche reali soddisfano questa ipotesi

Esempio –

$$-4143 - 1407x + 775x^2 + 5x^3 - 19x^4 + x^5$$

è il pol. car. di una reale simm.

$$(-4143, -1407, 775, 5, -19, 1)$$

Allora la somma delle moltepl. delle radici >0 è 3

" " " " " <0 è 2

$1 + x^2$

$(1, \overset{+}{\underset{-}{0}}, 1)$

perm: 2
0 zero o 2 rad < 0

var.: 2
0 zero o 2 rad > 0

non ci interessa