$A \in M_n(\mathbb{C})$ simmetrica. Essa è simile e congruente a una matrice diagonale $D$ che presenta sulla diagonale principale gli autovalori, ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità (alg. - geom.). A è congr. a

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Sia $E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$

Vale ${}^tE = E$, rango$(A) = r$

$$C = {}^tE \cdot D \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & \ddots \;\; 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}} & & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & \ddots \;\; 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \;\; \ddots \;\; 1}^{r} & \\ & 0 \;\; \ddots \;\; 0 \end{pmatrix}$$

forma canonica per congruenza di A

TEOR - A è congruente a C

COR - $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ simmetriche - A è congruente a B $\iff$ rango(A) = rango(B)

---

DIM - A congr a B $\iff$ hanno la stessa forma canonica per congruenza $\iff$ rango(A) = rango(B)

$A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. $A$ è congruente a una matrice diagonale $D$ sulla cui diagonale principale ci sono gli autovalori di $A$, ognuno ripetuto tante volte quant'è la sua molteplicità. $A$ è congr. a

$$D = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \; \cdots \; \lambda_h}^{>0} & & & \\ & \overbrace{\lambda_{h+1} \; \cdots \; \lambda_{h+k}}^{<0} & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

Costruisco

$$E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & 0 & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} & & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{h+1}}} & & & & \\ & 0 & & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{h+k}}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^tE = E$$

$$C = {}^tE \cdot D \cdot E = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\lambda_h}} & & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{h+1}}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \frac{1}{\sqrt{-\lambda_{h+k}}} & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_h & & & & \\ & & & \lambda_{h+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{h+k} & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\ }} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}\right\} h = \sigma^+ & & \\ & \left.\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}\right\} k = \sigma^- & \\ & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

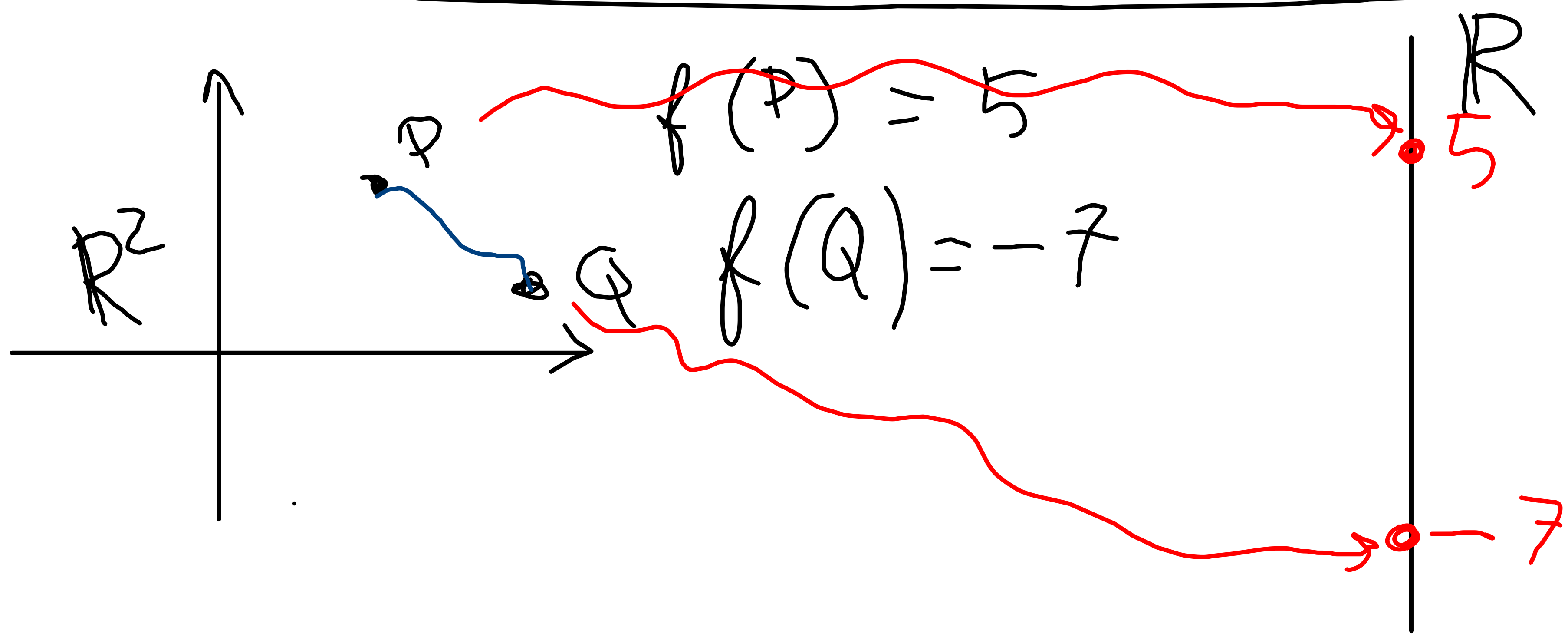
Forma canonica per congruenza di A

COR - $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simm. $A$ è congruente a $B$ $\iff$ i loro polinomi caratteristici hanno gli stessi numeri di variazioni e di permanenze.

DEF – $f : V \to \mathbb{R}$ una forma quadratica.

$f$ è detta definita positiva / negativa se, $\forall v \in V - \{\bar{0}_V\}$

$$f(v) > 0 \quad / \quad f(v) < 0$$



TEOR - $A \in M_n(\mathbb{R})$ simm. associata alla forma quadratica $f : V \to \mathbb{R}$.

$f$ è definita positiva negativa

$$\Updownarrow$$

$$\sigma(A) = (n,0) \qquad (0,n)$$

$$\Updownarrow$$

il pol. car. di $A$ ha $n$ variazioni permanenze

$A \in M_n(\mathbb{R})$ simmetrica. **Minore principale** di $A$ è un qualunque minore ottenuto intersecando certe $h$ righe di $A$ con le $h$ colonne aventi gli stessi indici.

---

TEOR (Criterio di Sylvester) - Siano $M_1, M_2, \dots, M_n$ minori principali di $A$ uno contenuto nell'altro.

$f$ risulta definita positiva $\iff \forall i \ |M_i| > 0$ $\quad + + + \dots +$

definita negativa $\iff \forall i \ (-1)^i |M_i| > 0$ $\quad - + - \dots$

Promemoria:

def. pos

$$\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \\ M_n \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} + \\ + \\ + \\ \vdots \\ + \end{array}$$

def. neg.

$$\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} - \\ + \\ - \\ \vdots \\ \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = 1 > 0$ +

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 > 0$ +

$|M_3| = |A| = 7 > 0$ +

def. pos.

$|M_1| = 5 > 0$

$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$|M_3| = |A| = 7 > 0$

$|M_1| = 7 > 0$

$|M_2| = \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 35 > 0$

$|M_3| = |A| = 7 > 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 7 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|M_1| = 1 > 0 \quad +$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 7 > 0 \quad +$$

$$|M_3| = |A| = -28 < 0 \quad -$$

indefinite

$$|M_1| = 5 > 0 \quad +$$

$$|M_2| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -4 < 0 \quad -$$

$$|M_3| = |A| = -28 < 0 \quad -$$

$$A = \begin{pmatrix} 732 & -1400 & \sqrt{3} \\ -1400 & -2 & 110 \\ \sqrt{3} & 110 & 84 \end{pmatrix}$$

Gli elementi di segno discorde sulla diag. principale rivelano: INDEFINITA

PROP- def. pos. $\Rightarrow$ gli elementi della diag. princ. sono tutti $>0$

def. neg $\Rightarrow$ — — — — — — — — — — — $<0$

IMPLICAZIONI NON INVERTIBILI!

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = -1 < 0 \qquad -$

$|M_2| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 > 0 \qquad +$

$|M_3| = |A| = -7 < 0 \qquad -$

def. neg.

---

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 0 \\ -3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$|M_1| = -1 < 0 \qquad -$

$|M_2| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 7 > 0 \qquad +$

$|M_3| = |A| = 28 > 0 \qquad +$

INDEFINITA

TEOR - $A$ è congruente a $C$.

DEF - Indice di positività / negatività di $A$ $\sigma^+$ / $\sigma^-$ : la somma delle molteplicità (alg = geom) degli autovalori positivi / negativi di $A$

DEF - Segnatura di $A$: $\sigma(A) = (\sigma^+, \sigma^-)$

COR - $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ simmetriche. $A$ è congruente a $B \Leftrightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

DIM - $A$ congr. a $B \Leftrightarrow$ hanno la stessa forma canonica per congruenza $\Leftrightarrow \sigma(A) = \sigma(B)$

# Classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$

rango = 1

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ Im : $X_0^2 = 0$ una retta (detta "contata 2 volte")

W : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ la stessa retta

rango = 2

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ Im : $X_0^2 + X_1^2 = 0$ unione di 2 rette

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

W : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto (che è l'intersezione delle due rette) rango = 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

studiando questa equazione si vede che l'immagine è costituita da $\infty$ punti e non contiene rette

Classificazione proiettiva delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.

rango = 1

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 = 0$ un piano ("contato 2 volte")

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso piano

---

rango = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ unione di 2 piani

$(X_0 + iX_1)(X_0 - iX_1) = 0$

W: $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ una retta (intersezione dei due piani) rango $= 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im: \; X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto: proprio quello

Lo studio di questa equazione rivela che l'immagine è una unione di $\infty$ rette generatrici passanti per uno stesso punto rango = 4

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Im : $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0$

Si può dimostrare

L'immagine risulta costituita da $\infty$ punti, non contiene piani, per ogni suo punto passano 2 rette contenute nella immagine

W : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ $\emptyset$

In campo reale ogni classe di equivalenza proiettiva è determinata dalla "segnatura non ordinata", cioè dalla coppia $\sigma^+, \sigma^-$ non ordinata.

## Classificazione proiettiva delle coniche di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$\sigma = (1,0), (0,1)$ $\quad$ $I_m : X_0^2 = 0$ $\quad$ una retta ("contata 2 volte")

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $W : \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ $\quad$ la stessa retta

$\sigma = (2,0)\ (0,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 + X_1^2 = 0$ un punto

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso punto

---

$\sigma = (1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$Im: X_0^2 - X_1^2 = 0$ unione di 2 rette

$(X_0+X_1)(X_0-X_1)=0$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ -X_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

un punto (che è la intersezione delle 2 rette)

$\sigma = (3,0)\ (0,3)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}: X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0 \qquad \emptyset$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$

---

$\sigma = (2,1)\ (1,2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Im}: X_0^2 + X_1^2 - X_2^2 = 0$

Costituita da $\infty$ punti; non contiene rette

Si può dimostrare

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \end{cases} \qquad \emptyset$

# Classificazione proiettiva delle quadriche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

$\sigma = (1,0)\ (0,1)$ Im: $X_0^2 = 0$ un piano ("contato 2 volte")

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

lo stesso piano

$\sigma = (2,0)\,(0,2)$ $\quad$ Im: $X_0^2 + X_1^2 = 0$ $\quad$ una retta

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

la stessa retta

---

$\sigma = (1,1)$ $\quad$ Im: $X_0^2 - X_1^2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ - \end{cases}$$

$\sigma = (3,0)\ (0,3)$ Im: $X_0^2+X_1^2+X_2^2=0$ un punto

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ lo stesso punto

cono immaginario

---

$\sigma = (2,1)\ (1,2)$ Im: $X_0^2+X_1^2-X_2^2=0$

Unione di $\infty$ rette generatrici passanti per uno stesso punto

cono reale

Si può dimostrare

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$W: \begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ un punto: proprio quello

$\sigma = (4,0)\ (0,4)$ $\quad Im: X_0^2+X_1^2+X_2^2+X_3^2=0 \quad \emptyset$

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$

---

$\sigma = (3,1)\ (1,3)$ $\quad Im: X_0^2+X_1^2+X_2^2-X_3^2=0$

si può dimostrare

Costituita da $\infty$ punti, non contiene piani, non contiene rette.

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$

quadrica ellittica

---

$\sigma = (2,2)$ $\quad Im: X_0^2+X_1^2-X_2^2-X_3^2=0$

Costituita da $\infty$ punti, non contiene piani, per ogni suo punto passano 2 rette contenute nella immagine

generatrici

$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ $\quad W: \begin{cases} X_0=0 \\ X_1=0 \\ -X_2=0 \\ -X_3=0 \end{cases} \quad \emptyset$

quadrica iperbolica