

Es. 13 $C: y = x^2$ $A \equiv (3, 0)$ trovare la padoria
 di A da A , cioè il luogo delle intersezioni
 delle tangenti a C con le loro normali condotte
 da A

$C: \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \end{cases}$ $P_u \equiv (u, u^2)$
 tangente a C in P_u : $t_u: y - u^2 = 2u(x - u)$ $u^2 - 2xu + y = 0$
 normale a t_u da A : $n_u: x - 3 + 2u(y - 0) = 0$ $2yu + x - 3 = 0$

$$\begin{array}{r} u^2 - 2xu + y \\ -u^2 + (3-x)u \\ \hline 2y \end{array} \quad \begin{array}{r} 2yu + x - 3 \\ \hline u + \frac{-4xy + 3 - x}{2y} \\ \hline 4y^2 \end{array} = \frac{-4x^2y + 3x - x^2 + 12xy - 9 + 3x - y^3}{4y^2}$$

$$\begin{array}{r} // \frac{-4xy + 3 - x}{2y} u + y \\ - \frac{-4xy + 3 - x}{2y} u \\ \hline \end{array} + \frac{(x-3)(-4xy + 3 - x) - 4y^3}{4y^2} = \frac{-4y^3 - 4x^2y + 12xy + 16x^2 - 9}{4y^2}$$

$$\begin{aligned} & \text{Solve } u^2 - 2xu + y = 0 \\ & \text{Ans) } 2yu + x - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2x & y \\ 2y & (x-3) & 0 \\ 0 & 2y & (x-3) \end{vmatrix} = 0$$

$$y - y_0 = - \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

$f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

t_{p_0} :

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

n_0 :

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \alpha$$

$$\begin{cases} x - x_0 = \alpha f'_x(x_0, y_0) \\ y - y_0 = \alpha f'_y(x_0, y_0) \\ x = x_0 + \alpha f'_x(x_0, y_0) \\ y = y_0 + \alpha f'_y(x_0, y_0) \end{cases}$$

Ex 11 C: $4x^2y - y^3 + 6xy - 8y + 1 = 0$

$F(x_0, x_1, x_2) = 4x_1^2x_2 - x_2^3 + 6x_0x_1x_2 - 8x_0^2x_2 + x_0^3 = 0$
 $(2x_1 - x_2)(2x_1 + x_2)$

$F_{x_0} = 6x_1x_2 - 16x_0x_2 + 3x_0^2$

$F_{x_1} = 8x_1x_2 + 6x_0x_2$

$F_{x_2} = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 6x_0x_1 - 8x_0^2$

$a_1: 4x_2 = 0$

$a_2: 12x_0 + 16x_1 - 8x_2 = 0$

$a_3: -12x_0 - 16x_1 - 8x_2 = 0$

$y = 0$
 $3 + 4x - 2y = 0$
 $3 + 4x + 2y = 0$

0	12	-12
0	16	-16
4	-8	-8

P_{100} P_{200} P_{300}

$x_2(4x_1^2 - x_2^2) = 0$
 $x_0 = 0$ $P_{100} = (0, 1, 0)$

$P_{200} = (0, 1, 2)$
 $P_{300} = (0, 1, -2)$

$F'_{x_0}(P_{300})x_0 + F'_{x_1}(P_{300})x_1 + F'_{x_2}(P_{300})x_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ f_1(\bar{u}) & f_2(\bar{u}) & f_3(\bar{u}) \\ f'_1(\bar{u}) & f'_2(\bar{u}) & f'_3(\bar{u}) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} x_3 &= 1 \\ x_1 &= x \\ x_2 &= y \end{aligned}$$

$$f_3(u) = 1$$

~~$x = u$~~

$$f_1(u) = f(u)$$

$$f_2(u) = \varphi(u)$$

$$\begin{cases} x_1 = f_1(u) \\ x_2 = f_2(u) \\ x_3 = f_3(u) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ f(\bar{u}) & \varphi(\bar{u}) & 1 \\ f'(\bar{u}) & \varphi'(\bar{u}) & 0 \\ (x-f(\bar{u}))(y-\varphi(\bar{u})) & 0 & 0 \\ \cancel{f(\bar{u})} & \cancel{\varphi(\bar{u})} & \cancel{1} \\ f'(\bar{u}) & \varphi'(\bar{u}) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$= 0$$

$$-\varphi'(\bar{u})(x-f(\bar{u})) + f'(\bar{u})(y-\varphi(\bar{u})) = 0$$

$$\frac{x-f(\bar{u})}{f'(\bar{u})} = \frac{y-\varphi(\bar{u})}{\varphi'(\bar{u})}$$

Primo metodo per riconoscere curve piane dello spazio.

Sia $C = \begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$ Considero il generico piano dello spazio:

$$\Pi: ax + by + cz + d = 0$$

Interseco C con Π : costruisco
 $\Phi(u) = F(f(u), \varphi(u), \psi(u))$. Risolvo $\Phi(u) = 0$
e sostituisco le soluzioni (valori particolari di u)
nelle equazioni di C .
Affinché Π contenga C , occorre e basta che
 $\Phi(u) = 0$ sia una identità.

Esempio: $\mathcal{C} : \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases} \quad \Pi : ax + by + cz + d = 0$

$$\Phi(u) = au + bu^2 + cu^3 + d = 0$$

questa è un'identità $\Leftrightarrow$ tutti i coefficienti delle potenze di u sono nulli

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = 0 \\ a = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Allora NESSUN piano contiene $\mathcal{C}$.

$$Es \quad C : \begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases}$$

a) verificare che e
 è l'g. e det. l'ordine

$$\begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ u = \frac{y}{3} \\ u = z - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{y^3}{9} - \frac{y^2}{3} \\ x = (z - 1)^3 - 6(z - 1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = (z - 1)^3 - 6(z - 1)^2 \\ y = 3(z - 1) \end{cases}$$

b) verificare che π è piano

$$\pi: ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases}$$

$F =$

$$\Phi = F(x(u), y(u), z(u)) =$$

$$= au^3 - 6au^2 + 3bu + cu - c + d =$$

$$= au^3 - 6au^2 + (3b + c)u - c + d$$

$$= 0 \quad \forall u \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} a = 0 \\ -6a = 0 \\ (3b + c) = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -3b \\ d = c \end{cases}$$

Sceglgo $b = 1$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = -3 \\ d = -3 \end{cases}$$

$$\boxed{\pi: y - 3z - 3 = 0}$$

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = F(u, v) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(u, v) &= u \\ \varphi(u, v) &= v \\ \psi(u, v) &= F(u, v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{P} &\equiv (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ &\text{corresponds to} \\ &\text{a } (\bar{u}, \bar{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} (x - \bar{x}) & (y - \bar{y}) & (z - \bar{z}) \\ f'_u(\bar{u}, \bar{v}) & \varphi'_u(\bar{u}, \bar{v}) & \psi'_u(\bar{u}, \bar{v}) \\ f'_v(\bar{u}, \bar{v}) & \varphi'_v(\bar{u}, \bar{v}) & \psi'_v(\bar{u}, \bar{v}) \end{vmatrix} = 0 \quad \left| \begin{vmatrix} (x - \bar{x}) & (y - \bar{y}) & (z - \bar{z}) \\ 1 & 0 & F'_u(\bar{u}, \bar{v}) \\ 0 & 1 & F'_v(\bar{u}, \bar{v}) \end{vmatrix} \right| = 0$$

$$- F'_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) - F'_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) + 1(z - \bar{z}) = 0$$