

9/1/09 4 in sviluppo (con eventuali rette stazionarie) della famiglia di rette

$$F(x, y, \alpha) = 3\alpha^2 x + (3\alpha^2 - 1)y - 2\alpha^3 = 0$$

$$= -2\alpha^3 + 3\alpha^2(x+y) - y$$

$$F_\alpha = -6\alpha^2 + 6\alpha(x+y)$$

$$F \quad \begin{array}{c} F_\alpha \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad 6y^4 + 18xy^3 + 18x^2y^2 - 6y^2 + 6x^3y = 0$$

num: $6y(y^3 + 3xy^2 + 3x^2y - y + x^3) = 0$

den: $y^4 + 4xy^3 + 6x^2y^2 + 4x^3y + x^4 = (y+x)^4$

Curva C dello spazio
 $\kappa \left(= \frac{1}{R} \right)$ flessione in P
 $\tau \left(= \frac{1}{T} \right)$ torsione in P

Formule di Frenet:

$$\begin{pmatrix} \vec{T}' \\ \vec{n}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{T} \\ \vec{n} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

$P \in C$

$\vec{T}$ versore della tang.
 $\vec{n}$ " " n. prin.
 $\vec{b}$ " " binorm.

$\vec{T}', \vec{n}', \vec{b}'$

loro vettori derivati
 (risp. alla lungh.
 d'arco)

Circ. osculatrice $\Rightarrow \mathbb{C} : \left. \begin{array}{l} x = u_2 \\ y = u_3 \\ z = u_3 \end{array} \right\}$ in $O \equiv (0,0,0)$
 covr. $\Rightarrow u=0$

$$\begin{aligned} x' &= 1 \\ y' &= 2u \\ z' &= 3u^2 \\ x'' &= 0 \\ y'' &= 2 \\ z'' &= 6u \end{aligned}$$

piano osc. Π

$$\begin{aligned} z' &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} (x-0) & (y-0) & (z-0) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

~~generica sfera~~

Sphere oscula in O

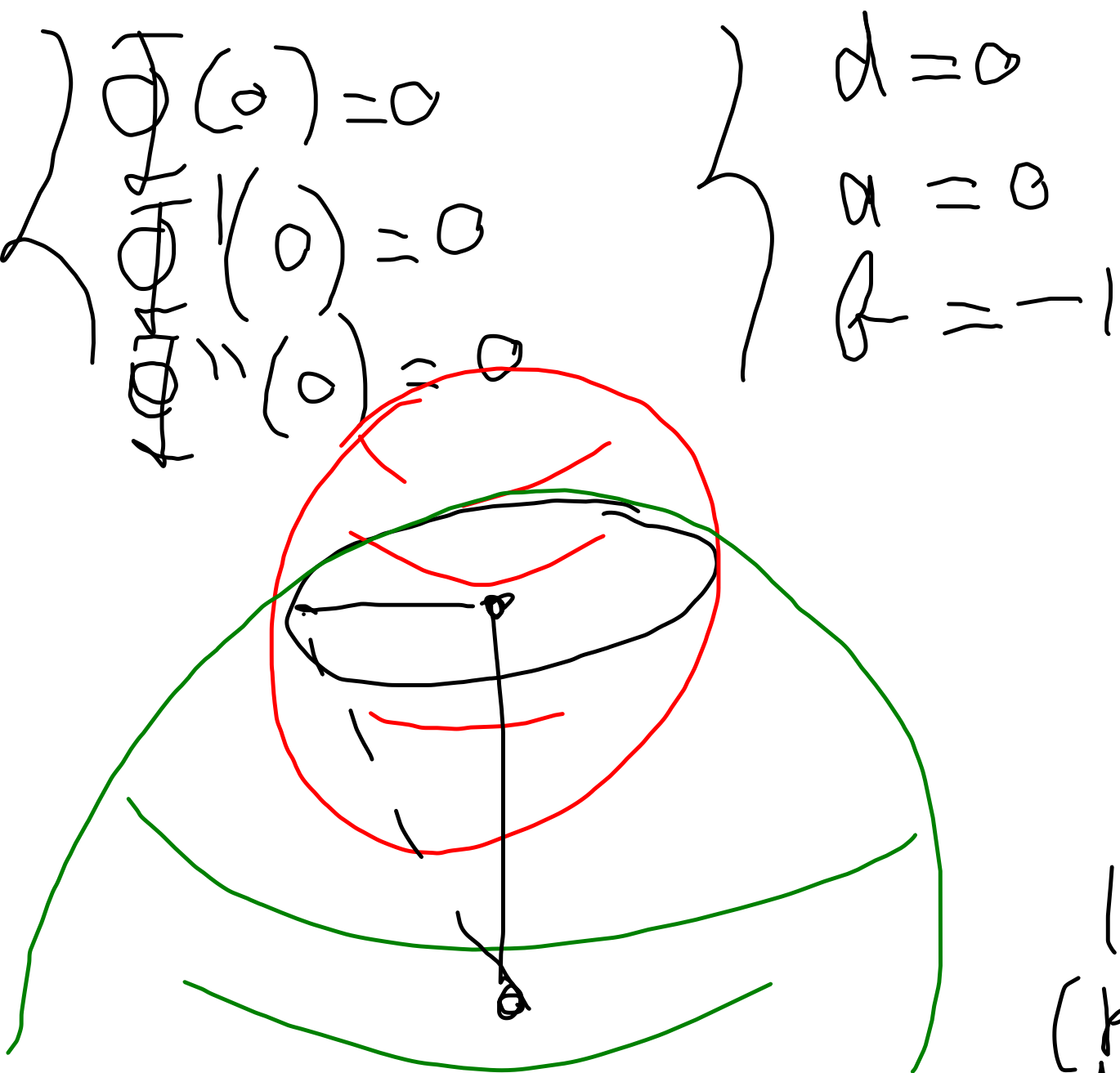
$$F(x,y,z) =$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= u^2 + u^4 + u^6 + au + bu^2 + cu^3 + d \\ \Phi'(u) &= 2u + 4u^3 + 6u^5 + a + 2bu + 3cu^2 \\ \Phi''(u) &= 2 + 12u^2 + 30u^4 + 2b + 6cu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &u \\ &d \\ &a \end{aligned}$$

$$2b + 2$$



$$G_c: x^2 + y^2 + z^2 - y + cz = 0$$

Sceleggi quella col centro
sul piano osc.

$$c = 0$$

$$\left. \begin{aligned} z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - y = 0$$

Il raggio della circ. coincide
(per questa scelta) con quello
della sfera, $r = R = \frac{1}{2}$

20/3/09 zb @ : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^4 - \alpha^2 \\ z = \alpha^2 \end{cases}$
 Triedro principale
 in A

$$A \equiv (1, 0, 1) \quad A$$

$$\alpha = 1$$

$$\begin{array}{l|l} x' = 1 & 1 \\ y' = 4\alpha^3 - 2\alpha & 2 \\ z' = 2\alpha & 2 \\ x'' = 0 & 0 \\ y'' = 12\alpha^2 - 2 & 10 \\ z'' = z & 2 \end{array}$$

tang. : $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}$

p. osc. : $\begin{vmatrix} (x-1) & y & (z-1) \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$-16x - 2y + 10z + 6 = 0$$

$$-8x - y + 5z + 3 = 0$$

p. norm. : $1(x-1) + 2y + 2(z-1) = 0$
 $x + 2y + 2z - 3 = 0$

norm. princ. : $\begin{cases} -8x - y + 5z + 3 = 0 \\ x + 2y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(l, m, n) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-8}{2} \right) = (-1/2, 5/2, -4)$$

$$= (-12, 21, -17)$$

binormale : $\frac{x-1}{-8} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{5}$

p. rettificante : $-12(x-1) + 21y - 17(z-1) = 0$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 109 \\ 2 & a & b \end{vmatrix} \quad c: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2e^\alpha \\ z = e^\alpha \end{cases}$$

u) tangente p. asc. in ogni punto

$$P_\alpha = (\alpha, 2e^\alpha, e^\alpha)$$

$$x' = 1 \quad x'' = 0 \quad t_\alpha: \frac{x - \alpha}{1} = \frac{y - 2e^\alpha}{2e^\alpha} = \frac{z - e^\alpha}{e^\alpha}$$

$$y' = 2e^\alpha \quad y'' = 2e^\alpha$$

$$z' = e^\alpha \quad z'' = e^\alpha$$

$$\Pi_\alpha: \begin{vmatrix} (x - \alpha) & (y - 2e^\alpha) & (z - e^\alpha) \\ 1 & 2e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & 2e^\alpha & e^\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (x - \alpha) & (y - 2e^\alpha) & (z - e^\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^\alpha & e^\alpha \end{vmatrix} = 0$$

$$-e^\alpha(y - 2e^\alpha) + 2e^\alpha(z - e^\alpha) = 0$$

$$-e^\alpha y + 2e^{2\alpha} + 2e^\alpha z - 2e^{2\alpha} = 0$$

$$e^\alpha(z - y) = 0$$

b) si dice se è piana e in tal caso si trova il piano

c) Sfera di rotazione di C attorno all'asse x $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$
 $P_\alpha \equiv (\alpha, ze^\alpha, e^\alpha)$
 Piano per $P_\alpha \perp$ asse: $\Pi_\alpha: x - \alpha = 0$
 Sfera centrata in O (perché è un punto dell'asse di rot.)
 e passante per P_α : $G_\alpha: (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = (\alpha-0)^2 + (ze^\alpha-0)^2 + (e^\alpha-0)^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + 4e^{2\alpha} + e^{2\alpha}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2 + 5e^{2\alpha}$$

$$x = \alpha$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - 5e^{2x} = 0$$

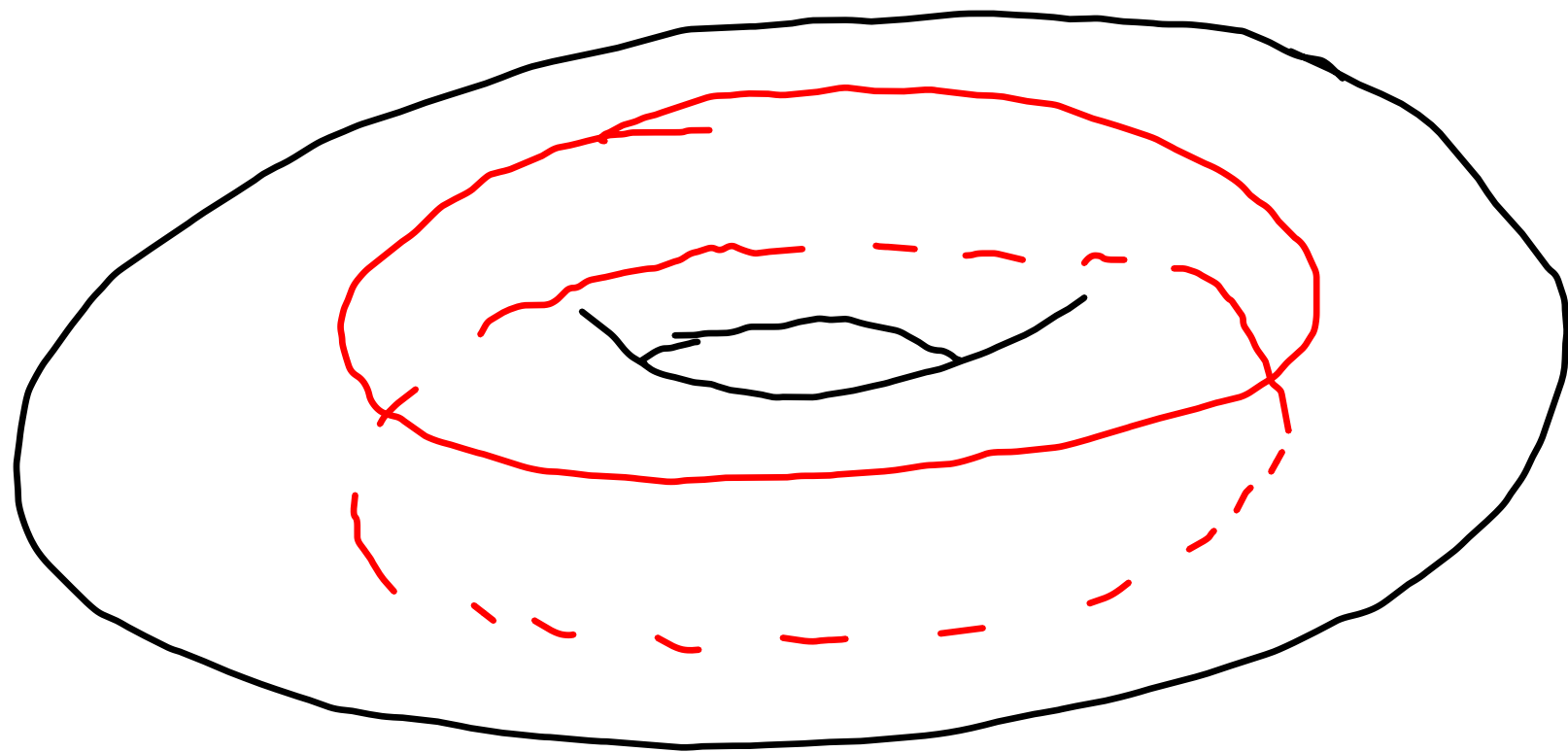
$\sum$ spf. $P \in \bar{\Sigma}$ punto semplice Π p. tang. a $\bar{\Sigma}$ in P

$$C = \sum n \Pi$$

ℓ generica retta tang. a $\bar{\Sigma}$ in Π
Domanda: quante intersez. di ℓ e C sono raccolte in P ?

ℓ ha contatto di ordine ∞ con Π (ci sta dentro)
" " " " almeno 1 con $\bar{\Sigma}$
quindi ha infinite in P almeno 2 intersez. con C

Dunque P è punto doppio per C
Chi ha più di 2 inters. con C raccolte in P ?
Le rette che hanno almeno 3 inters. con $\bar{\Sigma}$ in P :
le tang. e sintotiche



d) tangenti e simmetriche di S in

$$P = (0, 2, 1)$$

$$S: x^2 + y^2 + z^2 - x^2 - 5e^{2x} = 0$$

$$F(x, y, z) =$$

Generica retta per P:

$$P \leftrightarrow t = 0$$

$$\begin{cases} x = lt \\ y = 2 + mt \\ z = 1 + nt \end{cases}$$

$$\Phi(t) = 5e^{2lt} + n^2t^2 + m^2t^2 + 2nt + 4mt + 5$$

$$\Phi'(t) = -10le^{2lt} + 2n^2t + 2m^2t + 2n + 4m$$

$$-10l + 2n + 4m$$

$$-20l^2 + 2n^2 + 2m^2$$

$$\Phi''(t) = -20l^2e^{2lt} + 2n^2 + 2m^2$$

$$\begin{cases} \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases} \begin{cases} -5l + 2m + n = 0 \\ -10l^2 + n^2 + m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l = \frac{2m+n}{5} \\ l^2 = \frac{m^2+n^2}{10} \end{cases} \text{ in } P$$

$$\frac{4m^2 + n^2 + 4mn}{25} = \frac{m^2 + n^2}{10}$$

$$\begin{cases} 8m^2 + 2n^2 + 8mn = 5m^2 + 5n^2 \\ 3m^2 - 3n^2 + 8mn = 0 \\ l = (2m+n)/5 \end{cases}$$

$$\Sigma \quad \boxed{z^5} + \boxed{x^2 y^2} + \boxed{x^2 - 6xz - 2yz + y^2} = 0$$

" 0 cono tang. a Σ in 0

$$S \quad \boxed{yz^4 + 3x^2 y^3} + \boxed{-6xz^2} + \boxed{5x - 2y + 3z} = 0$$

" cono tang. del S in 0 (e' ip. pidno tang.)

$$\begin{cases} 3m^2 - 3n^2 + 8mn = 0 \\ p = (2m+n)/5 \end{cases} \quad \begin{cases} p = \frac{2m+n}{5} \\ m = -3n \end{cases} \quad \text{scelgo } n=1 \quad \begin{cases} p = -1 \\ m = -3 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = \frac{2m+n}{5} \\ m = \frac{5}{3} \end{cases} \quad \text{scelgo } n=3 \quad \begin{cases} p = 1 \\ m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

Tang. a sint.

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2 - 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

e) classificare P : iperbolico