28/6/2019 Complementi di Geometria N. di Matricola:

Rispondere UNICAMENTE su questi fogli, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti. Non consegnare alcun altro foglio.*

Tutte le equazioni si intendono scritte rispetto ad opportuni riferimenti dei rispettivi spazi.

1) In una retta affine $\mathcal{A}^1$ siano dati i punti $A \equiv (1),\ B \equiv (2),\ C \equiv (5),\ D \equiv (17)$.
   a) *(5 punti)* Si scriva l'equazione dell'omografia ω dell'ampliamento proiettivo di $\mathcal{A}^1$ per cui $\omega(A) = A,\ \omega(B) = B,\ \omega(C) = D$.
   b) *(3 punti)* Si calcoli il birapporto della quaterna (A, B, C, D).

2) In uno spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ sia data la quadrica Γ_α di equazione $(\alpha - 1)x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2y + 2(1 - \alpha)z + 1 = 0$
   a) *(6 punti)* Si classifichi Γ_α al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$.
   b) *(4 punti)* Si trovino le eventuali quadriche Γ_α di rotazione e si trovi lo spazio di rotazione di una di esse.

3) Nello spazio euclideo, data la superficie Σ di equazione $y^3 + x^2 - 9y^2 - yz + 27y + 3z - 27 = 0$
   a) *(3 punti)* si trovino i suoi eventuali punti multipli (reali).
   b) *(3 punti)* Scelto un punto multiplo, si scriva l'equazione del cono tangente a Σ in esso.
   c) *(2 punti)* Si scriva l'equazione del piano tangente a Σ in $Q \equiv (0, 0, 9)$.
   d) *(2 punti)* Si trovino le tangenti asintotiche in Q.

4) Nel piano euclideo, data la curva $\mathcal{C}$ di equazione $y = x^2$
   a) *(5 punti)* si trovi la sua podaria $\mathcal{L}$ dal punto $Q \equiv (0, 2)$ (cioè il luogo dei punti d'intersezione fra la generica tangente a $\mathcal{C}$ e la sua normale condotta da Q).
   b) *(3 punti)* Si trovino gli eventuali asintoti reali di $\mathcal{L}$.

a) $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (1,2)$, $C \equiv (1,5)$, $D \equiv (1,17)$

$\omega(A) = A$, $\omega(B) = B$, $\omega(C) = D$

Considero $\mathcal{G} = (A, B, C)$, $\mathcal{G}' = (A, B, D)$

Trovo basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ normalizzate rispetto ad $\mathcal{G}$ ed $\mathcal{G}'$.

$$\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (1,5) \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1 - 4 = -3 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{B} = (-3(1,1), 4(1,2)) = ((-3,-3), (4,8))$$

$$\gamma(1,1) + \delta(1,2) = (1,17) \quad \begin{cases} \gamma + \delta = 1 \\ \gamma + 2\delta = 17 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma + \delta = 1 \\ \delta = 16 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = 1 - 16 = -15 \\ \delta = 16 \end{cases}$$

$$\mathcal{B}' = (-15(1,1), 16(1,2)) = ((-15,-15), (16,32))$$

Cerco A t.c.

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & 16 \\ -15 & 32 \end{pmatrix}}_{Y} \qquad A = Y \cdot X^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}$$

b) (A,B,C,D) è definito come $\frac{p}{q}$, dove (p,q) sono coord. pr. di D risp. ad $\mathcal{G}$

Cerco le componenti di $(1,17)$ risp. a $\mathcal{B} = ((-3,-3),(4,8))$

$$x_0(-3,-3) + x_1(4,8) = (1,17) \qquad \begin{cases} -3x_0 + 4x_1 = 1 \\ -3x_0 + 8x_1 = 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x_0 + 4x_1 = 1 \\ 4x_1 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 = \frac{1-16}{-3} = \frac{-15}{-3} = 5 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

$$D =_{\mathcal{G}} (5,4)$$

$$\boxed{(A,B,C,D) = \frac{\overset{p}{5}}{\underset{q}{4}}}$$

2) $(\alpha-1)x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2y + 2(1-\alpha)z + 1 = 0$ a) Classificare

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & (1-\alpha) \\ 0 & (\alpha-1) & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ (1-\alpha) & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A_\alpha| = \alpha^2(1-\alpha)$$

		0		1	
α^2		0			
$(1-\alpha)$				0	
$\lvert A_\alpha\rvert$	+	0	+	0	−

$\alpha = 0$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad rg = 2$$

$\alpha = 1$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$rg = 3$

$$M_0^\alpha = \begin{pmatrix} (\alpha-1) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad |M_\alpha^0| = 0 \ \forall \alpha$$

$\alpha = 1$

$y = 0$ $\qquad$ $z = 0$

$z^2 + 1 = 0$ $\qquad$ $y^2 - 2y + 1 = 0$

α	$\lvert A_\alpha \rvert$	$rg A_\alpha$	$\lvert M^0_0 \rvert$	quadriche
$\alpha < 0$	$+$	4	0	paraboloidi iperbolici
$\alpha = 0$	$= 0$	2	0	deg rg = 2
$0 < \alpha < 1$	$+$	4	0	paraboloidi iperbolici
$\alpha = 1$	$= 0$	3	0	cilindro reale
$\alpha > 1$	$-$	4	0	paraboloidi ellittici

b) Rot.

$$\begin{pmatrix} (\alpha-1) & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$ trovo gli autoval.

$$\begin{vmatrix} (\lambda-\alpha+1) & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-1) & 1 \\ 0 & 1 & (\lambda-1) \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-\alpha+1)(\lambda^2-2\lambda+\cancel{1}-\cancel{1}) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-\alpha+1)$$

autovalori
0
2
$\alpha-1$

rot. $\iff 2 = \alpha-1 \iff \alpha = 3$

$\alpha = 3$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$m + n = 0$

$V_2 = \{(\lambda, \mu, -\mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_{V_2} = ((1,0,0),(0,1,-1))$

$(0\ 1\ 0\ 0)$

$(0\ 0\ 1\ -1)$

$$A_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\boxed{\begin{cases} 2x = 0 \\ 1 + 2y - 2z = 0 \end{cases}}$$

3) $\Sigma: y^3 + z^2 - 9y^2 - yz + 27y + 3z - 27 = 0$ a) Punti multipli

$F(x,y,z) =$

$F_x = 2x$

$F_y = 3y^2 - 18y - z + 27$

$F_z = -y + 3$

$$\begin{cases} F = 0 \\ F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} F = 0 \\ x = 0 \\ 27 - 54 - z + 27 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 27 + 0 - 81 + 81 - 27 = 0 \\ x = 0 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{M = (0,3,0)}$$

b)

	in M
$F_{xx} = 2$	2
$F_{xy} = 0$	0
$F_{xz} = 0$	0
$F_{yy} = 6y - 18$	0
$F_{yz} = -1$	-1
$F_{zz} = 0$	0

$$2x^2 + \cancel{2 \cdot 0\, x(y-3)} + \cancel{2 \cdot 0\, xz} + \cancel{0(y-3)^2} + 2(-1)(y-3)z + \cancel{0 z^2} = 0$$

$$2x - 2(y-3)z = 0$$

$$\boxed{2x - 2yz + 6z = 0}$$

$$\left((x-0)\frac{\partial}{\partial x} + (y-3)\frac{\partial}{\partial y} + (z-0)\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 F(0,3,0) = 0$$

$F_x = 2x$ $\qquad 0 \qquad$ c)

$F_y = 3y^2 - 18y - z + 27 \qquad 18$

$F_z = -y + 3 \qquad 3$

$(0, 0, 9)$

$$F_x(Q)(x-0) + F_y(Q)(y-0) + F_z(Q)(z-9) = 0$$

$$0x + 18y + 3(z-9) = 0$$

$$\boxed{18y + 3z - 27 = 0}$$

d) tang. as. in Q

Generica retta per Q $\begin{cases} x = \ell t \\ y = mt \\ z = 9 + nt \end{cases}$ $\quad Q \leftrightarrow t = 0$

$\Phi(t) = F(x(t), y(t), z(t))$

$= m^3 t^3 - mnt^2 - 9m^2t^2 + \ell^2 t^2 + 3nt + 18mt$

$\Phi'(t) = 3m^3t^2 - 2mnt - 18m^2t + 2\ell^2 t + 3n + 18m$

$\begin{cases} \Phi'(0) = 0 \\ \Phi''(0) = 0 \end{cases}$

$\Phi''(t) = 6m^3 t - 2mn - 18m^2 + 2\ell^2$

$\begin{cases} 3n + 18m = 0 \\ -2mn - 18m^2 + 2\ell^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -6m \\ -mn - 9m^2 + \ell^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -6m \\ 6m^2 - 9m^2 + \ell^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} n = -6m \\ \ell^2 = 3m^2 \end{cases}$

$\begin{cases} n = -6m \\ \ell = \pm m\sqrt{3} \end{cases}$ scelgo $m = 1$ $\ell = \pm\sqrt{3}$ $n = -6$

$\boxed{\begin{cases} x = \pm\sqrt{3}\,t \\ y = t \\ z = 9 - 6t \end{cases}}$

4) a) Podaria $\mathcal{G}$ di $\mathcal{C}: y=x^2$ risp. a $P\equiv(0,2)$

$P_u\equiv(u,u^2)$ tang. in P_u $\quad t_u: y-u^2=2u(x-u) \qquad 2ux-y-u^2=0$

normale a t_n da P: $\quad \dfrac{x-0}{2u}=\dfrac{y-2}{-1} \qquad x+2uy-4u=0$

$$\mathcal{G}:\begin{cases}-u^2+2xu-y=0\\(2y-4)u+x=0\end{cases} \qquad \begin{vmatrix}-1 & 2x & -y\\(2y-4) & x & 0\\0 & (2y-4) & x\end{vmatrix}=0$$

b) asintoti (vedi)

$$\boxed{-4y^3+16y^2-4x^2y-16y+7x^2=0}$$

$$F(X_0,X_1,X_2) = -4X_2^3+16X_2^2X_0-4X_1^2X_2-16X_2X_0^2+7X_1^2X_0=0$$

$$\begin{cases}F=0\\X_0=0\end{cases} \quad \begin{cases}-4X_2^3-4X_1^2X_2=0\\X_0=0\end{cases} \quad \begin{cases}-4X_2(X_2^2+X_1^2)=0\\X_0=0\end{cases}$$

$X_2=0$

$\cancel{(X_2^2+X_1^2)=0}$

$$\begin{cases}X_2=0\\X_0=0\end{cases} \quad P_\infty\equiv(0,1,0)$$

$F_{X_0}=16X_2^2-32X_2X_0+7X_1^2$ $\quad 7$

$F_{X_1}=-8X_1X_2+14X_1X_0$ $\quad 0$

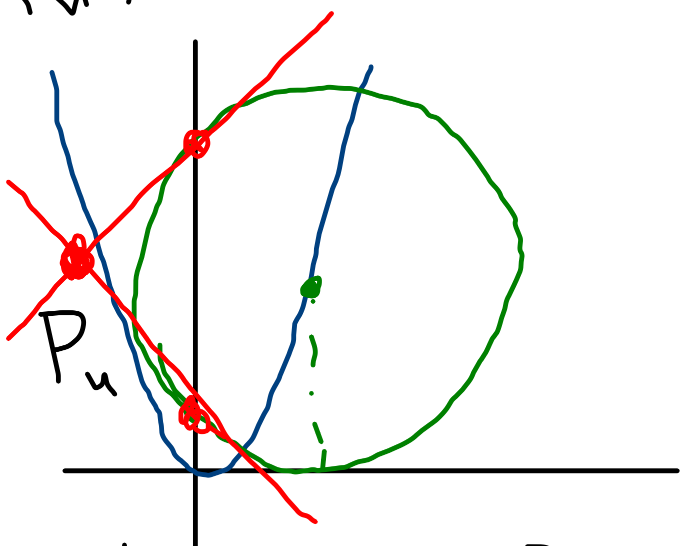
$F_{X_2}=-12X_2^2+32X_2X_0-4X_1^2-16X_0^2$ $\quad -4$

in P_∞

$7X_0+0X_1-4X_2=0$

$$\boxed{7-4y=0}$$

23 $\mathcal{F}$ famiglia delle circonferenze reali aventi centro su $\mathcal{P}: y=2x^2$ e tangenti all'asse x. Detta $\mathcal{C}$ la generica circonferenza di $\mathcal{F}$, siano r_1 ed r_2 le tangenti a $\mathcal{C}$ nei suoi punti d'intersezione con l'asse y. a) Luogo $\mathcal{L}$ descritto dal punto $r_1 \cap r_2$.



$$C_u = (u, 2u^2) \quad \mathcal{C}_u : (x-u)^2 + (y-2u^2)^2 = (2u^2)^2$$

$$x^2 - 2ux + u^2 + y^2 - 4u^2 y + \cancel{4u^4} = \cancel{4u^4}$$

$$x^2 + y^2 - 2ux - 4u^2 y + u^2 = 0$$

P_u è il polo dell'asse y rispetto alla conica $\mathcal{C}_u$

Posso trovare P_u come intersez. delle polari di due punti qualsiasi dell'asse y. In particolare, di $Q_1 = (1,0,0)$ e $Q_2 = (0,0,1)$

$$A_u = \begin{pmatrix} u^2 & -u & -2u^2 \\ -u & 1 & 0 \\ -2u^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_u \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \quad \mathcal{L}: \begin{cases} u^2 - ux - 2u^2 y = 0 \\ -2u^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} u^2 - ux - 2u^2 y = 0 \\ -2u^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-2y)u^2 - xu = 0 \\ -2u^2 + y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} (1-2y) & -x & 0 & 0 \\ 0 & (1-2y) & -x & 0 \\ -2 & 0 & y & 0 \\ 0 & -2 & 0 & y \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-2y)u^2 - xu \quad \Big| \; \frac{-2u^2+y}{\frac{2y-1}{2}}$$

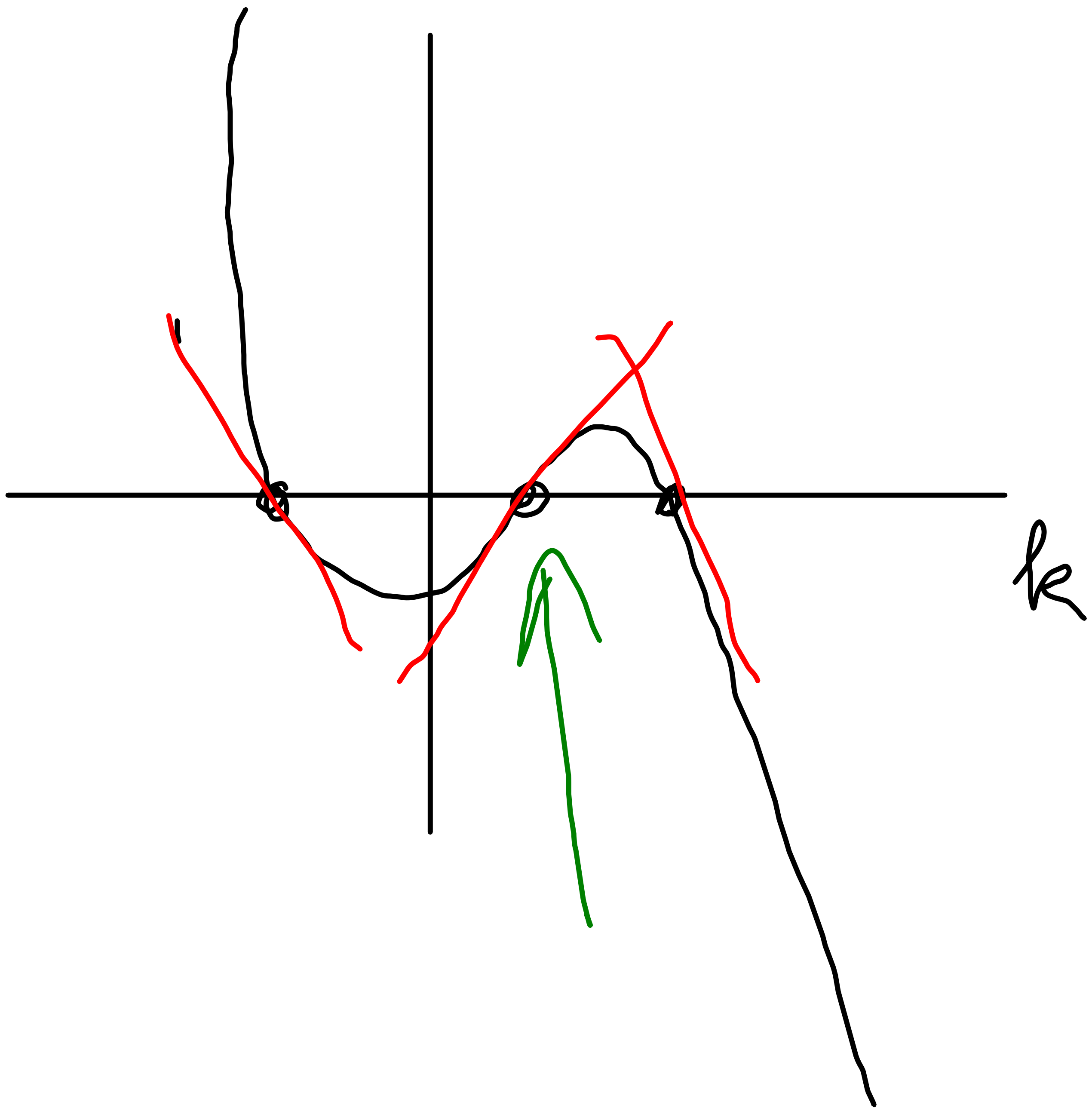
$$-\frac{2y^2 - y + 2ux}{2}$$

$$-2u^2 + y \quad \Big| \; \frac{2ux + 2y^2 - y}{\quad}$$

$$-\frac{4y^4 - 4y^3 + y^2 - 2x^2 y}{2x^2}$$

$$4y^4 - 4y^3 + y^2 - 2x^2 y = 0$$

$$\boxed{y(4y^3 - 4y^2 + y - 2x^2) = 0}$$



$$-\lambda^3 + \xi\lambda^2 + b_1\lambda = r$$

$$-\lambda\left(-\lambda^2 + \xi\lambda + b_1\right)$$

$-\quad + \quad +$

$+ \quad +$

$-\quad - \quad +$

$- \quad +$

$$\left(-\lambda^2 + \xi\lambda + b_1\right)$$

$-\quad - \quad -$

$-\quad + \quad -$

$+ \quad +$