Gruppo $G = (A, T)$ $\quad T : A \times A \longrightarrow A$

per cui valgano:

1) associatività $\forall a, b, c \in A$

$$a T (b T c) = (a T b) T c$$

2) esistenza di un elemento neutro $u \in A$ tale che $\forall a \in A$ $\quad a T u = a = u T a$

3) esistenza di inverso (o opposto) $\forall a \in A \ \exists\, a' \in A$ tale che $a T a' = u = a' T a$

G si dice abeliano o commutativo se

4) $\forall a, b \in A \quad a T b = b T a$

Esempi:

abeliani

$(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$

$(\mathbb{Q}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}-\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}-\{0\},\cdot)$

$A = \{$simmetrie di un dato poligono$\}$

T = composizione

non abeliano

$A = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ T: composizione

Non gruppi

$(\mathbb{N}^\circ,+)$ $(\mathbb{N}^\circ,\cdot)$ $(\mathbb{Z},\cdot)$ $(\mathbb{Z},-)$

$(\mathbb{Q},\cdot)$ $(\mathbb{R},\cdot)$ $(\mathbb{C},\cdot)$

Anello: $(A, \top, \perp)$ t.c.

1) $(A, \top)$ gruppo abeliano

2) $(A, \perp)$ associativa

3) proprietà distributive $\forall a, b, c \in A$

$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c)$$

$$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c)$$

Si dice commutativo se per $(A, \perp)$ vale la proprietà commutativa

Si dice unitario se $(A, \perp)$ ha elemento neutro

Campo: anello $(A, \top, \perp)$ tale che $\left(A - \{\text{el. neutro di } (A, \top)\}, \perp\right)$ sia un gruppo abeliano

---

Esempi: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Spazio vettoriale

$(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$

$\mathbb{K}$: campo

V: insieme $\neq \emptyset$ vettori

$+$: op. bin. interna su V

$\cdot$: op. bin. esterna

$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ prodotto per scalare

coefficienti

tale che:

1) $(V, +)$ gruppo abeliano

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ $v, w \in V$

$2_1)$ $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$

prodotto per scalare — prodotto del campo — prodotto per scalare

$2_2)$ $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$ | $2_3)$ $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$ | $2_4)$ $1_{\mathbb{K}} \cdot v = v$

Esempi:

P

$(\mathbb{K}, \mathbb{K}, +, \cdot)$

$(\mathbb{K}, \mathbb{K}^n, +, \cdot)$

$(\mathbb{K}, \mathbb{K}[x], +, \cdot)$

prod. per scalare

$(\mathbb{R}, \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, +, \cdot)$

Somma del parallelogramma

$(\mathbb{R}, \{$segmenti del piano con un estremo in $P\}, +, \cdot)$

$(\mathbb{R}, \{$forze nel piano, applicate in $P\}, +, \cdot)$

composizione di forze

Esempi:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ anello comm. e unitario

$\mathbb{R}[x] = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ è polinomiale} \}$

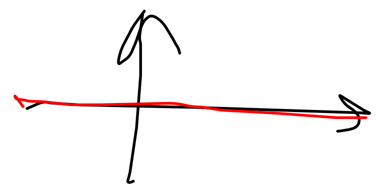
$(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ anello comm. e unitario

f polinomiale: $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

$\in \mathbb{R}$

$0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 0$ $\quad 0 + 0 \cdot x \dots$



$1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto 1$ $\quad 1 + 0 \cdot x \dots$