$V=(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ Combinazione lineare dei vettori $v_1, \dots, v_h$ mediante gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ è il vettore

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \dots + \alpha_h \cdot v_h$$

---

n-pla di elementi di $\mathbb{R}$

ogni applicazione da $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ a $\mathbb{R}$.

Es.: una terna di reali $f: \{1,2,3\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$1 \longmapsto \sqrt{3}$$
$$2 \longmapsto \sqrt{3}$$
$$3 \longmapsto 4$$

$(\sqrt{3}, 4, 4) \neq (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 4) \neq (\sqrt{3}, 4, \sqrt{3})$

Esiste una somma di n-ple.

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) \overset{def}{=} (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$

$\mathbb{R}^n \overset{def}{=} \{$n-ple di reali$\}$

$\mathbb{K}^n \overset{def}{=} \{$n-ple di el. di $\mathbb{K}\}$

PROP $(\mathbb{R}^n, +)$ è un gruppo abeliano

Esiste un prodotto per scalare : $\gamma \in \mathbb{R}$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$\gamma \cdot (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \overset{def}{=} (\gamma \cdot \alpha_1, \dots, \gamma \cdot \alpha_n)$

PROP $((\mathbb{R}, +, \cdot), \mathbb{R}^n, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

$\mathbb{K}$ $\mathbb{K}^n$

somma di reali

somma di n-ple

Matrice di tipo (m,n) a elementi in $\mathbb{R}$

qualsiasi funzione da $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ a $\mathbb{R}$

$$f : \mathbb{N}_2 \times \mathbb{N}_3 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
(1,1) &\longmapsto 0\\
(1,2) &\longmapsto 42\\
(1,3) &\longmapsto \sqrt{5}\\
(2,1) &\longmapsto -3\\
(2,2) &\longmapsto 2/3\\
(2,3) &\longmapsto -3
\end{aligned}$$

$(1,1)$ $a^1_1 = 0$ $(1,2)$ $a^1_2 = 42$ $(1,3)$ $a^1_3 = \sqrt{5}$

$(2,1)$ $a^2_1 = -3$ $(2,2)$ $a^2_2 = 2/3$ $(2,3)$ $a^2_3 = -3$

$$\begin{array}{ll}
1^a \text{ riga} & \\
2^a \text{ riga} & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 42 & \sqrt{5} \\ -3 & 2/3 & -3 \end{array}\right) \\
 & \quad 1^a \text{ colonna} \quad 2^a \text{ col.} \quad 3^a \text{ col.}
\end{array}$$

$(0,-3)$

Esiste una <u>somma</u> di matrici di tipo (m,n):

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ - & - & - \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^1_1 & \cdots & b^1_n \\ - & - & - \\ b^m_1 & \cdots & b^m_n \end{pmatrix} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} (a^1_1+b^1_1) & \cdots & (a^1_n+b^1_n) \\ - & - & - \\ (a^m_1+b^m_1) & \cdots & (a^m_n+b^m_n) \end{pmatrix}$$

$M_{m,n}(\mathbb{R}) \overset{def}{=} \left\{ \begin{matrix} \text{matrici di tipo } (m,n) \\ \text{a elementi in } \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$

PROP - $(M_{m,n}(\mathbb{R}), +)$ è un gruppo abeliana

Esiste un <u>prodotta per scalare</u>: $\gamma \in \mathbb{R}$ $A \in M_{m,n}$

$$\gamma \cdot \overset{A}{\begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ - & - & - \\ a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}} \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \gamma \cdot a^1_1 & \cdots & \gamma \cdot a^1_n \\ - & - & - \\ \gamma a^m_1 & \cdots & \gamma \cdot a^m_n \end{pmatrix}$$

PROP

$(\mathbb{R}, M_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale

---

Formule fighette per le stesse cose:

$$\left(a^i_j\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}} + \left(b^i_j\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}} \overset{def}{=} \left(c^i_j\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}}$$

dove $\forall i\in\mathbb{N}_m, \forall j\in\mathbb{N}_n$

$$c^i_j \overset{def}{=} a^i_j + b^i_j$$

$$\gamma \cdot \left(a^i_j\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}} \overset{def}{=} \left(d^i_j\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}}$$

dove $\forall i\in\mathbb{N}_m \forall j\in\mathbb{N}_n$ $d^i_j \overset{def}{=} \gamma \cdot a^i_j$

$$\cdot : \mathcal{M}_{m,n} \times \mathcal{M}_{n,p} \longrightarrow \mathcal{M}_{m,p}$$

$$(a^i_j)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m \\ j\in\mathbb{N}_n}} \cdot (b^r_s)_{\substack{r\in\mathbb{N}_n \\ s\in\mathbb{N}_p}} \overset{def}{=} (c^h_k)_{\substack{h\in\mathbb{N}_m \\ k\in\mathbb{N}_p}}$$ dove

$$c^h_k \overset{def}{=} \sum_{t=1}^{n} a^h_t \, b^t_k$$

detto prodotto riga per colonna

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2} \quad \cdot \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$$

$$= \begin{pmatrix} (1\cdot 3 + (-2)\cdot 6) & (1\cdot 1 + (-2)\cdot(-2)) \\ (0\cdot 3 + 5\cdot 6) & (0\cdot 1 + 5\cdot(-2)) \\ (-1\cdot 3 + 4\cdot 6) & (-1\cdot 1 + 4\cdot(-2)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 30 & -10 \\ 21 & -9 \end{pmatrix}$$

Sia $I_n \overset{def}{=} (\delta^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$

dove $\delta^i_j \overset{def}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$

PROP-

Sia $A = (a^i_j)_{\substack{i \in \mathbb{N}_m \\ j \in \mathbb{N}_n}} \in M_{m,n}$ Allora

$$I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$$

$M_n \overset{def}{=} M_{n,n}$ (matrici quadrate di ordine n)

PROP-

$(M_n, +, \cdot)$ è un anello unitario e NON commutativo (per $n \geq 2$)

prod. riga per colonna)

Data $A = (a^i_j)_{\substack{i \in \mathbb{N}_m \\ j \in \mathbb{N}_n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$, la sua

<u>trasposta</u> è la matrice $(b^r_s)_{\substack{r \in \mathbb{N}_n \\ s \in \mathbb{N}_m}} \in \mathcal{M}_{n,m}$

dove $b^r_s \overset{def}{=} a^s_r$; essa viene indicata

$\forall r \in \mathbb{N}_n$

$\forall s \in \mathbb{N}_m$

come ${}^tA$

${}^TA$

A^T $\quad A'$

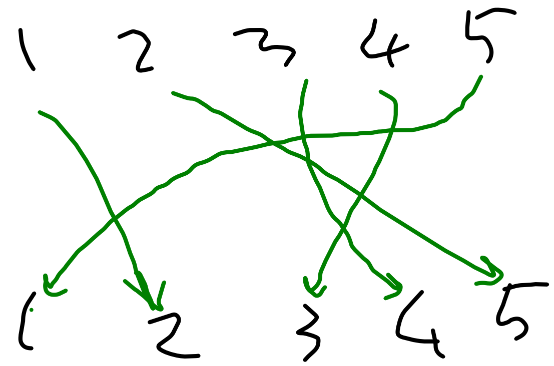
Permutazione di un insieme X:

ogni applicazione biiettiva da X a sé

Es: $X = \mathbb{N}_5 = \{1,2,3,4,5\}$

modi di indicarla:

$$\sigma: \begin{array}{l} 1 \longmapsto 2 \\ 2 \longmapsto 5 \\ 3 \longmapsto 4 \\ 4 \longmapsto 3 \\ 5 \longmapsto 1 \end{array}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

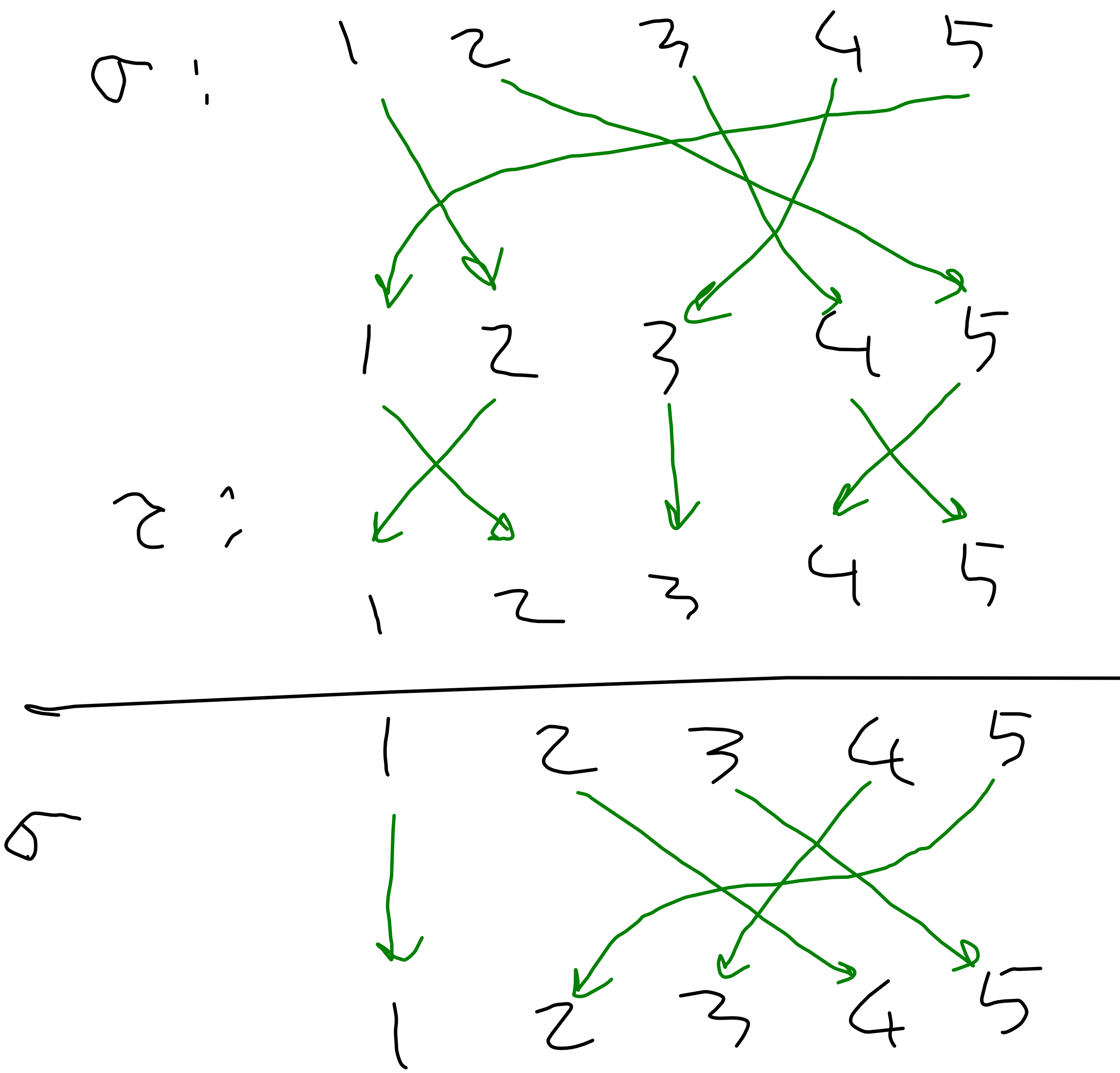
$$(2,5,4,3,1)$$

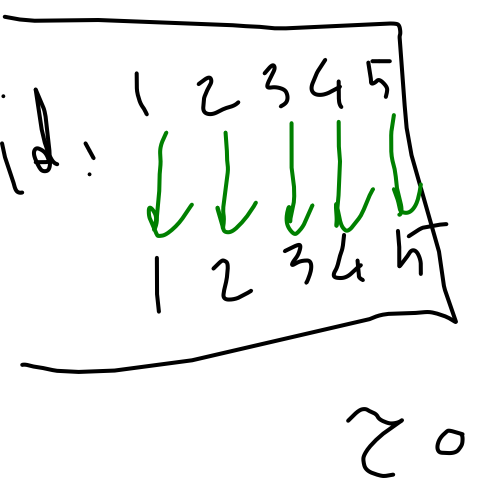
$$\mathcal{S}_n = \{\text{permutazioni di } \mathbb{N}_n\}$$

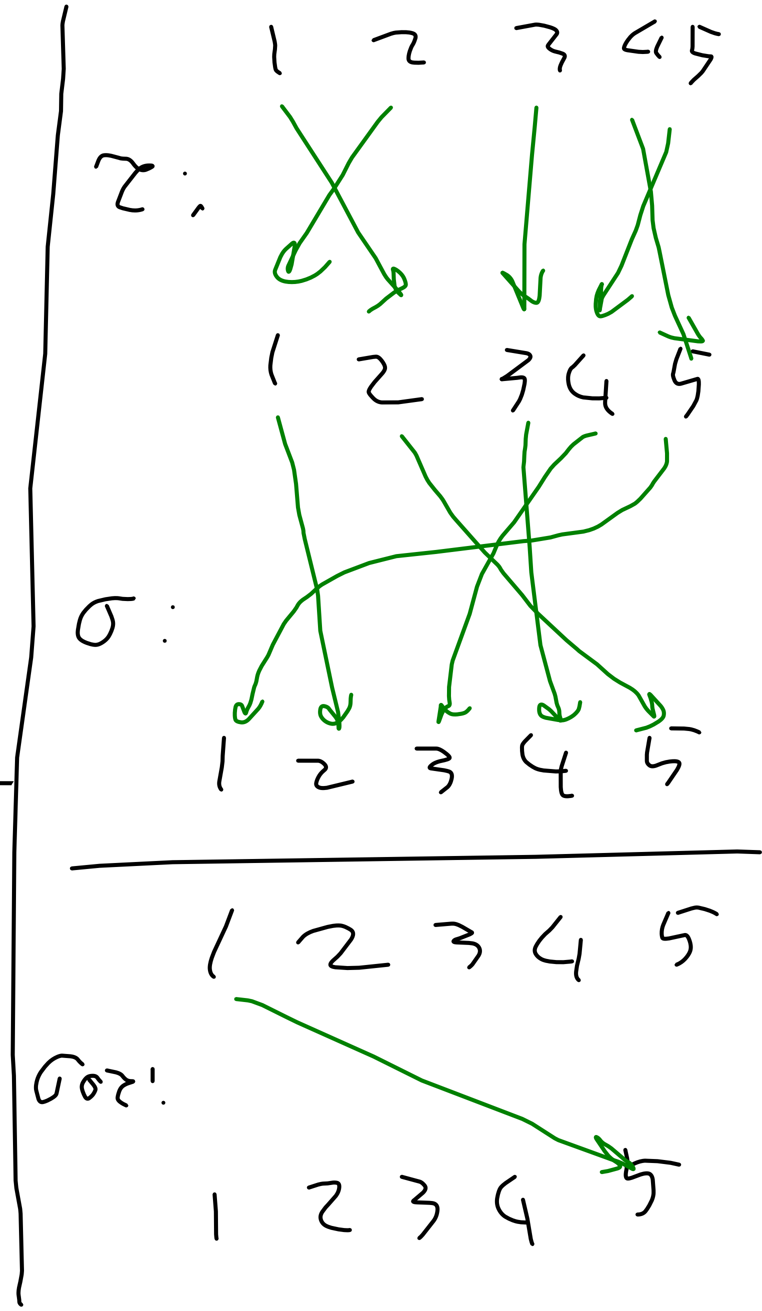
PROP $(\mathcal{S}_n, \circ)$ è un gruppo NON abeliano per $n \geq 3$

gruppo simmetrico

Esempio:



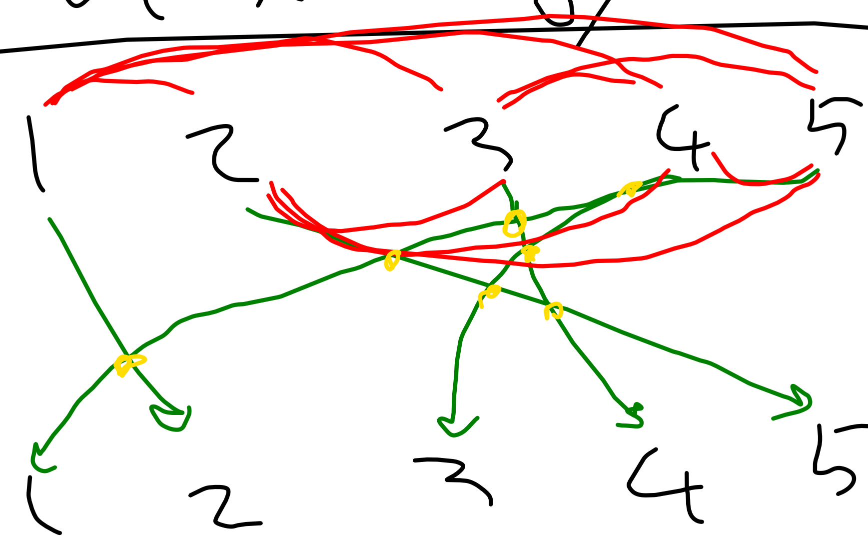




$\mathcal{S}_5$ Una coppia (i,j) con $i<j$ è detta <u>in inversione</u> per la permutazione σ se

$$\sigma(i) > \sigma(j)$$

Es: σ :



$\mu(\sigma) = 7$

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$
NO	NO	NO	SÌ	SÌ	SÌ	SÌ
$(3,4)$	$(3,5)$	$(4,5)$				
SÌ	SÌ	SÌ				

$\mu(\sigma) \stackrel{def}{=}$ n. di coppie in inversione di σ

$\mathrm{sign}(\sigma) \overset{def}{=} (-1)^{\mu(\sigma)}$

$\begin{cases} +1 & \text{se } \mu(\sigma) \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \mu(\sigma) \text{ è dispari} \end{cases}$

Data $A = (a^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in M_n$

$\det A$, $\det(A)$, $|A|$ $\overset{def}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (\mathrm{sign}(\sigma))\, a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a^n_{\sigma(n)}$

Es: con $n=5$, uno di questi addendi sarebbe (con la solita σ)

$- a^1_2\, a^2_5\, a^3_4\, a^4_3\, a^5_1$

$n=1 \quad A=(a^1_1) \quad |A| = a^1_1$

$Es: \quad A=(5) \quad |A|=5$

$n=2 \quad A=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \quad |A| = +a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$

$Es: \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = +1\cdot 4 - 2\cdot 3$

$- \qquad +$

$n=3 \quad A=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{pmatrix} \quad |A| = +a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2$

$- a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$$+1 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 3$$

$$-4 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 0 \cdot 4$$

$$= 12 + 0 + 0$$

$$-12 + 3 - 0 = 3$$

TEOR - $\det({}^tA) = \det(A)$

TEOR - A, B matrici uguali, tranne che per la prima riga: $a^1_1, \ldots, a^1_n$ $b^1_1, \ldots b^1_n$

Sia C la matrice che ha le stesse righe (da 2 ad n) e come prima riga

$$(c^1_1, \ldots, c^1_n) = (a^1_1, \ldots, a^1_n) + (b^1_1, \ldots, b^1_n)$$

Allora $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

TEOR - $A \in M_n$ $\gamma \in \mathbb{R}$

B con le righe da 2 a n uguali a quelle di A, ma prima riga: $(\gamma a_1^1, \dots, \gamma a_n^1)$

Allora $\det(B) = \gamma \cdot \det(A)$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} -4 & 0 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}} \quad \underset{C}{\begin{pmatrix} -3 & 2 & 10 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}}$$

controllate: $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Controllate: $\det(D) = 4 \cdot \det(A)$

TEOR - Sia B ottenuta da A permutando le righe di A mediante la permutazione σ. Allora $\det(B) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det(A)$

ES

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -|A|$$