

COR - \exists una riga di A che è combinazione delle altre $\Leftrightarrow |A| = 0$

COR² - Se una riga è nulla allora $|A| = 0$

COR² - Se due righe sono proporzionali allora $|A| = 0$

COR - $A \in M_n$ B ottenuta sommando alla h -esima riga una comb. lin. delle ALTRE righe. Allora $|B| = |A|$

TEOR - Se A è triangolare allora

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_i$$

A triangolare alta se
bassa

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$$

A diagonale se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0$

Trasformazioni elementari di riga:

1) \rightarrow una riga sommo una comb. lin. delle altre righe

2) scambio due righe

3) moltiplica una riga per un $\alpha \neq 0$

TEOR - $A \in M_n$ \exists successione finita di tr. el. di riga 1 e 2 che trasformano A in una B triangolare.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{DET} \\ \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

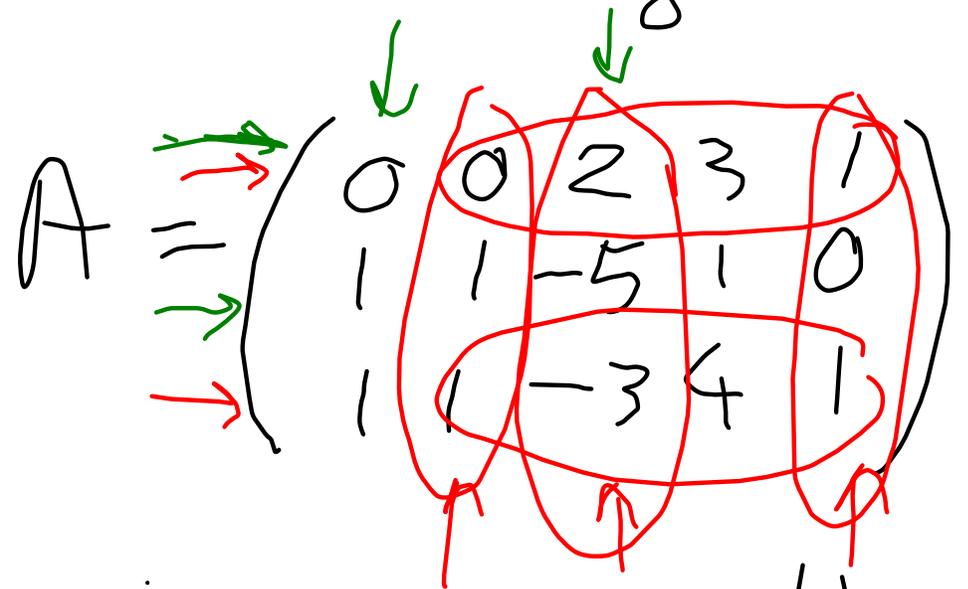
$\text{II} \leftarrow \text{II} - \text{I}$ $\text{III} \leftarrow \text{III} - \text{II}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \text{II} \leftarrow \text{II} + \left(-\frac{5}{2}\right)\text{I}$$

$$A \in M_{(m,n)}$$

sottomatrice di A

ogni matrice ottenuta intersecando alcune righe con alcune colonne di A



una sottomatrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

minore : sottomatrice quadrata

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n$ Minore complementare dell'elemento a_{rs} è il minore $M_{rs}^{\#} \in M_{n-1}$ ottenuto cancellando la riga r e la colonna s

Complemento algebrico (o cofattore)

di a_{rs} è il numero

$$A_{rs}^{\#} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{r+s} |M_{rs}^{\#}|$$

TEOR (Laplace) - $A \in M_n$ Fisso la riga
 h .

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{hj} \cdot A_{hj}$$

columna h :

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ih} \cdot A_{ih}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad h=1$$

$$|A| = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

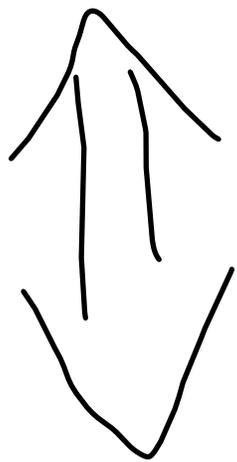
$$= 1 \cdot 15 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = 15 - 12 = 3$$

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \cancel{B_1^1} + 0 \cdot \cancel{B_1^2} + 0 \cdot B_1^3 = \\
 &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3
 \end{aligned}$$

III ← III - I
 B

TEOR -

$A \in M_n$ è invertibile



$$|A| \neq 0$$

TEOR - $\text{Si } \det(A) \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{matrix} t \\ \left(\begin{matrix} A_{ji} \\ \end{matrix} \right) \\ t \end{matrix} A^{\#}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |A| = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 15 & 12 & -12 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -1 & -3 \\ 12 & 0 & -3 \\ -12 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^\# = \begin{pmatrix} +a_2^2 & -a_1^2 \\ -a_2^1 & +a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a_2^2 & -a_2^1 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \quad |A| = -17$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{(m,n)}$ Le righe stanno in K^n
" colonne " " K^m

$V = (K, V, +, \cdot)$ $X \subset V$
 $X \neq \emptyset$

$L(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid v \text{ è comb. lin. di elementi di } X\}$
chiusura lineare di X

Sottospazio vettoriale di V : $(K, W, +, \cdot)$
dove $W \subseteq V$, e $(K, W, +, \cdot)$ è spazio
vettoriale
dove $+$ è restrizione di $+$.

PROP — $(K, W, +, \cdot)$ è sottospazio vett.

W è chiusa rispetto a $+$ e \cdot

↓ cioè

$$\forall w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$$

$$\forall w_1 \in W \quad \alpha \in K \quad \alpha \cdot w_1 \in W$$

PROP - $L(X)$ è sottospazio vett. di V .

Data $A \in M_{(m,n)}$, la chiusura lineare dell'insieme delle righe è un sottosp. vett. di K^n , chiamata spazio riga di A

la ch. lin. dell'insieme delle sue colonne è sottosp. vett. di K^m , detto spazio colonna di A .

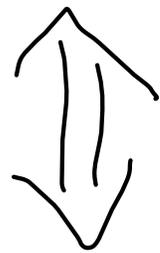
$L(X)$ si dice anche generato da X e X è detto essere un suo insieme di generatori.

In V siano dati v_1, \dots, v_h ;
dica che $X = \{v_1, \dots, v_h\}$ è linearmente dipendente se $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{K}$ tali che
non tutti nulli

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_h v_h = \vec{0}_V$$

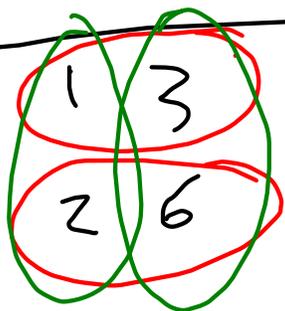
vettore nullo, cioè el. neutro di $(V, +)$

TEOR - $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ lin. dip.



$\exists v_k \in X$ t.c. v_k è comb. lin. di

$v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$



X è linearmente indipendente
se non è linearmente dipendente

Dato V , un suo insieme di generatori linearmente l n dipendente
è detto essere una base di V

TEOR - Se V ha una base finita di n elementi, tutte le sue basi hanno n elementi.

In tal caso n viene detta dimensione di V $\dim V = n$

PROP - Se $\dim V = n$, ogni insieme di generatori di V ha cardinalità $\geq n$; se la cardinalità è proprio n , allora è una base.