COR – $\exists$ una riga di A che è combinazione delle altre $\Longleftrightarrow |A| = 0$

COR^2 – Se una riga è nulla allora $|A|=0$

COR^2 – Se due righe sono proporzionali allora $|A|=0$

COR – $A \in M_n$ B ottenuta sommando alla h-esima riga una comb. lin. delle ALTRE righe. Allora $|B| = |A|$

TEOR – Se A è triangolare allora

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a^i_i$$

A triangolare alta se
bassa

$i > j \Rightarrow a^i_j = 0$
$<$

A diagonale se $i \neq j \Rightarrow a^i_j = 0$

Trasformazioni elementari di riga:

1) a una riga sommo una comb. lin. delle altre righe
2) scambio due righe

3) moltiplica una riga per un $\alpha \neq 0$

TEOR - $A \in M_n$; $\exists$ successione finita di tr. el. di riga 1 e 2 che trasformano A in una B triangolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} - \mathrm{I}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{\mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - \mathrm{II}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-3) = 3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II} \leftarrow \mathrm{II} + \left(-\frac{5}{2}\right)\mathrm{I}}{=}$$

$A \in M_{(m,n)}$ **sottomatrice di A**

ogni matrice ottenuta intersecando alcune righe con alcune colonne di A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

una sottomatrice:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

minore: sottomatrice quadrata

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$A \in M_n$ <u>Minore complementare</u> dell'elemento a_s^r è il minore $M_s^r \in M_{n-1}$ ottenuto cancellando la riga r e la colonna s

<u>Complemento algebrico</u> (o <u>cofattore</u>) di a_s^r è il numero

$$A_s^r \overset{def}{=} (-1)^{r+s} \cdot |M_s^r|$$

TEOR (Laplace) - $A \in M_n$ Fisso la riga h:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_j^h \cdot A_j^h$$

colonna h:

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_h^i A_h^i$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad n = 1$$

$$|A| = a_1^1 A_1^1 + a_2^1 A_2^1 + a_3^1 A_3^1 =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 15 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) = 15 - 12 = 3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot B_1^1 + 0 \cdot B_1^2 + 0 \cdot B_1^3 =$$

$$\overline{\underline{III}} \leftarrow \overline{\underline{III}} - \overline{\underline{I}}$$

$$R$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

TEOR -

$A \in M_n$ è invertibile

$$\Updownarrow$$

$$|A| \neq 0$$

TEOR - Sia $|A| \neq 0$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot {}^t\left(A_j^i\right)$$

$${}^tA^{\#}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&4\\0&3&-1\\1&3&4\end{pmatrix}\qquad |A|=3$$

$$A^{\#}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&-1\\3&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&-1\\1&4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&3\\1&3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&4\\3&4\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&4\\1&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\1&3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&4\\3&-1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&4\\0&-1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15&-1&-3\\12&0&-3\\-12&1&3\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}15&12&-12\\-1&0&1\\-3&-3&3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5&4&-4\\-1/3&0&1/3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix} \qquad A^{\#} = \begin{pmatrix} +a^2_2 & -a^2_1 \\ -a^1_2 & +a^1_1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} a^2_2 & -a^1_2 \\ -a^2_1 & a^1_1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad |A| = -17 \qquad A^{-1} = \frac{1}{-17} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in M_{(m,n)}$ Le righe stanno in $\mathbb{K}^n$
" colonne " " $\mathbb{K}^m$

$V = (\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ $X \subset V$, $X \neq \emptyset$

$\mathcal{L}(X) \stackrel{def}{=} \{ v \in V \mid v$ è comb. lin. di elementi di $X \}$
chiusura lineare di X

Sottospazio vettoriale di V: $(\mathbb{K}, W, +, \cdot)$
dove $W \subseteq V$, e $(\mathbb{K}, W, +, \cdot)$ è spazio vettoriale

restrizioni a W di $+$ $\cdot$

PROP — $(\mathbb{K}, W, +, \cdot)$ è sottospazio vett.

$\Updownarrow$

W è chiuso rispetto a $+$ e $\cdot$

cioè

$\forall\, w_1, w_2 \in W \qquad w_1 + w_2 \in W$

$\forall\, w_1 \in W \quad \alpha \in \mathbb{K} \qquad \alpha \cdot w_1 \in W$

PROP - $\mathcal{L}(X)$ è sottospazio vett. di V.

Data $A \in M_{(m,n)}$, la chiusura lineare dell'insieme delle righe è un sottosp. vett. di $\mathbb{K}^n$, chiamato <u>spazio riga di A</u>

la chi. lin. dell'insieme delle sue colonne è sottosp. vett. di $\mathbb{K}^m$, detto spazio colonna di A

$L(X)$ si dice anche **generato da X** e X è detto essere un suo **insieme di generatori**.

In V siano dati $v_1, \dots, v_h$;
dico che $X = \{v_1, \dots, v_h\}$ è **linearmente dipendente** se $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbb{K}$ tali che non tutti nulli

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_h \cdot v_h = \overline{0}_V$$

vettore nullo, cioè el. neutro di $(V,+)$

TEOR – $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ lin. dip.

$$\Updownarrow$$

$\exists\, v_r \in X$ t.c. v_r è comb. lin. di

$$v_1, \dots, v_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{matrix}$$

X è linearmente indipendente se non è linearmente dipendente

Dato V, un suo insieme di generatori linearmente indipendente è detto essere una <u>base</u> di V

TEOR - Se V ha una base finita di n elementi, tutte le sue basi hanno n elementi.

In tal caso n viene detto dimensione di V $\quad \dim V = n$

PROP - Se $\dim V = n$, ogni insieme di generatori di V ha cardinalità $\geq n$; se la cardinalità è proprio n, allora è una base.