In $\mathbb{R}^2$

$r: bx+cy+d=0$ $\left(b\dfrac{X_1}{X_0}+c\dfrac{X_2}{X_0}+d\right)=0$ $X_0\neq 0$

$s: ex+fy+g=0$, X_0:

$dX_0+bX_1+cX_2=0$

$gX_0+eX_1+fX_2=0$

$\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=3 \\ -2y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $(2,1)$

$\begin{cases} x-y=3 \\ 2x-2y=1 \end{cases}$

$\left(\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}\right)$ $rk=1$ $rk=2$ NO sol.

$\begin{cases} -3X_0+X_1+X_2=0 \\ -X_0+X_1-X_2=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(\overline{X_0},\overline{X_1},\overline{X_2})\sim\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right) = (-2,-4,-2)\sim(1,2,1)$

$\begin{cases} -3X_0+X_1-X_2=0 \\ -X_0+2X_1-2X_2=0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

$(\overline{X_0},\overline{X_1},\overline{X_2})\sim\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\right)=(0,-5,-5)\sim(0,1,1)$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} X_0' \\ X_1' \\ X_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{———} \\ \text{——} \\ \text{—} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ e + ax + by \\ f + cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

$q : V \longrightarrow \mathbb{K}$
dim = n

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ordinata di V

$G_{\mathcal{B}}(q)$, <u>matrice di Gram</u> di q rispetto a $\mathcal{B}$ è anche la <u>matrice di Gram</u> di φ rispetto a $\mathcal{B}$, dove φ è la forma polare di q ed è:

$$G = \begin{pmatrix} \varphi(e_1, e_1) & \cdots & \varphi(e_1, e_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi(e_n, e_1) & \cdots & \varphi(e_n, e_n) \end{pmatrix} \quad \text{(simmetrica)}$$

$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y,z) \longmapsto x^2 + 6xy + 4xz - 5z^2$

$\mathcal{B}$ = base naturale

$((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$

$$\varphi((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + 3xy' + 3yx' + 2xz' + 2zx' - 5zz'$$

$\varphi((1,0,0),(1,0,0))$

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & & & \\ y' & & \left(\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{matrix}\right) & \\ z' & & & \end{array}$$

$T: V \longrightarrow W$ lin.
$\quad\bar{\mathcal{B}} \qquad \tilde{\mathcal{B}}$

La matrice che rappresenta T rispetto a $\bar{\mathcal{B}}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ si indica con $M_{\bar{\mathcal{B}}\tilde{\mathcal{B}}}(T)$

Sia $T: V \longrightarrow V$ lineare

Dato $\lambda \in \mathbb{K}$, $U_\lambda \overset{def}{=} \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$

Per quasi tutti i $\lambda \in \mathbb{K}$, U_λ è semplicemente costituito dal solo $\bar{0}_V$.

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$ U_λ è un sottospazio vettoriale di V.

Per ogni possibile valore $\bar{\lambda}$ tale che $U_{\bar{\lambda}} \neq \{\bar{0}_V\}$, chiamo $\bar{\lambda}$ <u>autovalore</u>, $U_{\bar{\lambda}}$ <u>autospazio</u> e ogni suo elemento <u>autovettore</u> (relativi a $\bar{\lambda}$).

$\dim V = n$

$\mathcal{B}$ base ordinata di V

$A = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$

$v =_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$T(v) = \lambda v$

$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda I_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$\lambda I_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

V_λ: $(\lambda I_n - A) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

λ è autovalore

$\iff$ il sistema ha sol. $\neq$ ovvia

$\iff rk(\lambda I_n - A) < n$

$\iff |\lambda I_n - A| = 0$

$|\lambda I_n - A|$ risulta essere un polinomio in λ, di grado n, detto **polinomio caratteristico**

TEOR

$\tilde{\lambda}$ è un autovalore di $T \iff \tilde{\lambda}$ è radice del polinomio caratteristico

$\tilde{\lambda}$ autovalore di T (e di A)

Molteplicità algebrica di $\tilde{\lambda}$: la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico

Molteplicità geometrica di $\tilde{\lambda}$: la dim $U_{\tilde{\lambda}}$

TEOR

$1 \leq mg(\tilde{\lambda}) \leq ma(\tilde{\lambda})$

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}$ nat

$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T) = A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

cercare autovalori e autospazi

$$\begin{vmatrix} (\lambda-5) & -2 & \cancel{0} \\ -2 & (\lambda-5) & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{(\lambda-3)} \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} (\lambda-5) & -2 \\ -2 & (\lambda-5) \end{vmatrix} = (\lambda-3)\left((\lambda-5)^2-(-2)^2\right) =$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-5-2)(\lambda-5+2) =$$

$$= (\lambda-3)^2(\lambda-7)$$

autov	ma	mg
3	2	2
7	1	1

$U_7: \begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} 2x-2y=0 \\ -2x+2y=0 \\ 4z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$U_3: \begin{pmatrix} \cancel{-2} & \cancel{-2} & \cancel{0} \\ -2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{0} \\ 0 \\ \cancel{0} \end{pmatrix}$

$-2x-2y=0$

$U_3: x+y=0$