ESERCIZI SULL'OMOTOPIA

1) Mostrare che se X è uno spazio topologico ed $f : X \to \mathbf{S^n}$ è una mappa non suriettiva, allora f è omotopa ad una mappa costante.

2) Mostrare che ogni sottospazio stellato di $\mathbf{R^n}$ è contraibile.

3) Sia $f : \mathbf{S^n} \to \mathbf{S^n}$ una mappa priva di punti fissi. Si mostri che f è omotopa alla mappa antipodale $\alpha : \mathbf{S^n} \to \mathbf{S^n}$ definita da $\alpha(x) = -x$.

4) Sia r una retta di $\mathbf{R^3}$, mostrare che $\mathbf{R^3} - r \simeq \mathbf{S^1}$. Generalizzare poi al caso di $\mathbf{R^n} - \mathbf{A^{n-2}}$, dove $\mathbf{A^{n-2}}$ è un sottospazio affine $(n-2)$-dimensionale di $\mathbf{R^n}$.

5) Siano N ed S due punti antipodali di $\mathbf{S^2}$, e sia $\overline{NS}$ il diametro che li unisce. Mostrare che $\mathbf{S^2}/_{N \equiv S} \simeq \mathbf{S^2} \cup \overline{NS}$, dove $\mathbf{S^2}/_{N \equiv S}$ è lo spazio ottenuto da $\mathbf{S^2}$ identificando N con S.

6) Dimostrare che se γ è una circonferenza in $\mathbf{R^3}$, allora $\mathbf{R^3} - \gamma \simeq \mathbf{S^2} \cup \overline{NS}$. (Suggerimento: mostrare che il sottospazio di $\mathbf{R^3}$ ottenuto facendo ruotare intorno all'asse z la circonferenza di equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ (y-1)^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ è un retratto forte per deformazione di $\mathbf{R^3} - \{(x, y, z) \in \mathbf{R^3} \mid z = 0, x^2 + y^2 = 1\}$).