# ESERCIZI SUL GRUPPO FONDAMENTALE

1) Siano $P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbf{R^2}$ punti distinti del piano. Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbf{R^2} - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

2) Siano $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}$ punti distinti del Toro. Trovare il gruppo fondamentale di $X = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P\}$ e di $X_n = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

3) Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbf{S^2} \cup r_1 \cup r_2 \cup \cdots \cup r_n$ dove $r_1, r_2, \dots, r_n$ sono raggi distinti della sfera.

4) Sia $r$ una retta di $\mathbf{R^3}$ e $\gamma$ una circonferenza centrata in $r$ e senza punti in comune con essa. Si calcoli il gruppo fondamentale dello spazio $X = \mathbf{R^3} - r - \gamma$ (suggerimento: si trovi un opportuno sottospazio di $\mathbf{R^3}$ che sia un retratto forte per deformazione di $X$).

5) Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbf{S^3} - \gamma$, dove $\gamma$ è una circonferenza di $\mathbf{R^3}$ e $\mathbf{S^3} = \mathbf{R^3} \cup \{\infty\}$ è la compattificazione uno-punto di $\mathbf{R^3}$.

6) Sapendo che identificando a coppie i lati di un poligono di $2n$ lati si ottiene una supeficie chiusa, elencare tutte le possibili superficie che si possono ottenere identificando i lati di un ottagono ognuno col suo opposto (usare il teorema di classificazione delle superficie chiuse).

7) Trovare il gruppo fondamentale dello spazio $X$, quoziente di $\mathbf{S^1} \times [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ rispetto alle identificazioni sui bordi indicate nel seguente schema.