GEOMETRIA (22/4/2009) I parziale

Indicare chiaramente, all'inizio dell'elaborato, numero di matricola e tipo di compito

1) Sia $V = \mathbf{R}^4$ e sia $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & (2-2k) & (k-2) & 1 \\ -1 & (2k-1) & 0 & 0 \end{pmatrix}$

i) *(4 punti)* Al variare di $k \in \mathbf{R}$, calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}A_k$ e di $\mathrm{Im}A_k$.

ii) *(3 punti)* Stabilire per quali eventuali valori di k il vettore $v = \big((0,1,2,(k-7)\big)^T \in \mathrm{Im}A_k$.

iii) *(4 punti)* Rappresentare in forma cartesiana e parametrica minima i sottospazi $U = \mathrm{Ker}A_4$ e $W = \mathrm{Im}A_4$ ottenuti per $k = 4$.

iv) *(3 punti)* Calcolare (sempre per $k = 4$) le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$.

2) Siano $V = \mathbf{R}^3$ e $W = \mathbf{R}^4$. Stabilire per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa giustificando adeguatamente la risposta.

i) *(2 punti)* Non esistono trasformazioni lineari suriettive da V a W.

ii) *(2 punti)* Non esistono trasformazioni lineari iniettive da V a W.

iii) *(2 punti)* Ogni insieme di 3 vettori di V è linearmente dipendente.

iv) *(2 punti)* Ogni insieme di 4 vettori di W è linearmente indipendente.

3) Stabilire per ciascuno dei seguenti sottoinsiemi se è un sottospazio di V (dove V è lo spazio vettoriale specificato a fianco per ciascun insieme) e in tal caso determinarne la dimensione e una base. Altrimenti stabilire se è un sottospazio affine e in tal caso determinarne la dimensione e una base della giacitura.

i) *(3 punti)* $H = \{p(x) \in V \mid$ il coefficiente del monomio di grado 3 è uguale a $1\}$, dove $V = \mathbf{R}_3[x]$.

ii) *(3 punti)* $L = \{A \in V \mid A^T = -A\}$, dove $V = M_{2,2}(\mathbf{R})$.

iii) *(3 punti)* $M = \left\{ v \in V \mid v = \begin{pmatrix} \alpha+5 \\ 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbf{R} \right\}$, dove $V = \mathbf{R}^3$.

4) Nello spazio, rispetto ad un fissato RA (O, x, y, z), siano Π il piano di equazione $x - z = 0$ ed r_λ la retta di equazioni $\begin{cases} x + y - (\lambda+1)z = -4 \\ y - z = 4 \end{cases}$

i) *(5 punti)* Si dica per quali eventuali valori di $\lambda \in \mathbf{R}$ l'intersezione di Π con r_λ è costituita da uno, nessuno o infiniti punti.

ii) *(2 punti)* Fissato $\lambda = 0$, si trovi il piano Π' contenente r_0 e parallelo alla retta s di equazioni $\begin{cases} y = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$

iii) *(2 punti)* Ancora per $\lambda = 0$, si trovi il piano Π'' parallelo ad r_0, parallelo ad s e passante per $P(1,1,1)$.