

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** se ritenete la risposta vera, la lettera **F** se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla. **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici, ...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora.

1) Sia $(A, +, \cdot)$ un anello in cui esistono divisori dello zero; siano $a, b \in A$. Allora, indicando con 0 l'elemento neutro di $(A, +)$,

- F V** a) se $a, b \neq 0$, allora $a \cdot b \neq 0$
F V b) se $a, b \neq 0$, allora $a \cdot b = 0$
F V c) esistono $a, b \neq 0$ per cui $a \cdot b = 0$
F V d) se $a = 0$, allora $a \cdot b = 0$

2) Quali dei seguenti sottoinsiemi X di $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono chiusi rispetto alla somma?

- F V** a) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^t A = -A\}$
F V b) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha tutti gli elementi razionali}\}$
F V c) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha almeno un elemento uguale a } 0\}$
F V d) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha tutti gli elementi irrazionali}\}$

3) Quali dei seguenti sottoinsiemi X di $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ sono chiusi rispetto al prodotto per scalare?

- F V** a) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^t A = -A\}$
F V b) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha tutti gli elementi razionali}\}$
F V c) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha almeno un elemento uguale a } 0\}$
F V d) $X = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid A \text{ ha tutti gli elementi irrazionali}\}$

4) Siano $A, B \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$ matrici regolari. Allora

- F V** a) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
F V b) $\det(3A) = 3 \det(A)$
F V c) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
F V d) $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$

5) Sia V lo spazio vettoriale delle successioni reali $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ che ammettono limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Quali delle seguenti applicazioni $T : V \rightarrow \mathbf{R}$ sono lineari?

- F V** a) $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$
F V b) $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = a_1$
F V c) $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = 0$
F V d) $T((a_n)_{n \in \mathbf{N}}) = 1$

6) $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ è una base ordinata di $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$. Le componenti di $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ rispetto a \mathcal{B} sono

- F V** a) $(1, 2, 3, 4)$
F V b) $(1, 1, 1, 1)$
F V c) $(-1, -1, -1, 4)$
F V d) $(4, 3, 2, 1)$

7) Sia S un sistema lineare possibile. Sia S' un sistema lineare le cui equazioni sono combinazioni lineari delle equazioni di S . Allora

- F** **V** a) $\text{Sol}S' \subseteq \text{Sol}S$
F **V** b) $\text{Sol}S' = \text{Sol}S$
F **V** c) $\text{Sol}S \subseteq \text{Sol}S'$
F **V** d) né $\text{Sol}S' \subseteq \text{Sol}S$ né $\text{Sol}S \subseteq \text{Sol}S'$

8) Quali dei seguenti spazi vettoriali sono isomorfi allo spazio dei polinomi in x , a coefficienti reali, di grado ≤ 1 ?

- F** **V** a) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^t A = -A\}$
F **V** b) $\{\text{polinomi in } x, \text{ di grado } \leq 2, \text{ con termine noto nullo}\}$
F **V** c) $\{\text{polinomi in } x, \text{ di grado } \leq 2, \text{ con coefficienti tutti uguali}\}$
F **V** d) $\{A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R}) \mid {}^t A = A\}$

9) Sia V uno spazio vettoriale e siano $X_1, X_2, Y \subset V$ con X_1, X_2 sistemi di generatori di V e Y linearmente indipendente. Allora

- F** **V** a) $X_1 \cup Y$ è un sistema di generatori di V .
F **V** b) $X_1 \cap X_2$ è un sistema di generatori di V .
F **V** c) $X_1 \cap Y$ è una base di V .
F **V** d) $X_1 \cup X_2$ è un sistema di generatori di V .