Esercizi di comprensione (non obbligatori)

(1) Verifica che la proiezione quoziente della sfera sullo spazio proiettivo è una proiezione di rivestimento.
(2) Definisci una proiezione di rivestimento dal piano cartesiano alla bottiglia di Klein. Segna sul piano i punti che corrispondono a una fibra della proiezione.
(3) Dimostra che tutte le fibre di un rivestimento hanno la stessa cardinalità.
(4) Spiega perché il logaritmo e la radice n-esima possono essere definiti quali funzioni continue su un qualunque aperto semplicemente connesso di $\mathcal{C} - \{0\}$.
(5) Considera le mappe $f, g\colon \mathcal{C} - \{0\} \to S^1 \times S^1$ date da

$$f(z) := \left(\frac{z}{|z|}, e^{i|z|}\right) \quad \text{e} \quad g(z) := \left(\frac{z}{|z|}, e^{i \ln |z|}\right).$$

Determina se f e g sono proiezioni di rivestimento.
(6) Essendo le proiezioni di rivestimento omeomorfismi locali, possiamo aspettarci che X è una varietà se e solo se $\widetilde{X}$ è una varietà. Bisogna però tenere conto anche di altre due proprietà delle varietà.
  (a) Dimostra che se X è uno spazio di Hausdorff, allora lo è anche $\widetilde{X}$.
  (b) Dimostra che in un rivestimento di grado finito se $\widetilde{X}$ è uno spazio di Hausdorff, allora lo è anche X. Cosa puoi dire quando le fibre sono infinite?
  (c) È sempre vero che X ha una base di topologia numerabile se e solo lo stesso vale anche per $\widetilde{X}$?
  (d) Dimostra che se X è una varietà, allora lo è anche $\widetilde{X}$ (puoi assumere senza dimostrazione che il gruppo fondamentale di una varietà è numerabile).
  (e) Dimostra che se $\widetilde{X}$ è una varietà e se X è uno spazio di Hausdorff, allora anche X è una varietà.

Esercizi di esame (obbligatori)

(1) Assumiamo che X è connesso per archi e che il suo gruppo fondamentale è un gruppo di torsione (cioè tutti gli elementi hanno ordine finito). Dimostra che tutte le mappe da X a S^1 sono omotope alla mappa costante.
(2) Determina tutti i rivestimenti dell' unione puntata di due sfere di dimensione diversa.
(3) Sia P il piano proiettivo. Determina tutti i rivestimenti di $P \times P$, $P \vee P$ e $P \# P$ (somma connessa di varietà).
(4) Usa la teoria dei rivestimenti per trovare tutti i sottoguppi di indice 2 e 3 del gruppo libero a due generatori F_2. Quali tra questi sono sottogruppi normali? Trova inoltre un sottogruppo di F_2 che non è finitamente generato.