



## PROBLEMI DI CLASSIFICAZIONE

In una fissata categoria il “problema della classificazione” consiste nel problema dell’esistenza di un algoritmo capace di stabilire, in un numero finito di passi, se due dati oggetti sono o non sono isomorfi.

La categoria a cui siamo interessati è quella che ha per oggetti le **varietà topologiche  $n$ -dimensionali** e per isomorfismi gli **omeomorfismi**.

Quindi la domanda che ci poniamo è:

*date due varietà  $n$ -dimensionali è possibile stabilire se siano o meno omeomorfe?*

Visto che un omeomorfismo porta componenti connesse in componenti connesse ci limiteremo ad analizzare il caso di varietà connesse.

Inoltre il caso di varietà con bordo deriva dall’analisi delle componenti di bordo (che sono varietà  $(n-1)$ -dimensionali) e dal caso senza bordo. Prenderemo quindi in esame solo varietà senza bordo.

## UN PO’ DI STORIA I

- **$n=1$  compatto:** ogni curva è omeomorfa alla circonferenza.

**non compatto:** ogni curva che *soddisfa il II assioma di numerabilità* è omeomorfa alla retta. La condizione aggiuntiva è necessaria in quanto esiste un controesempio: la lunga retta.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_line\\_\(topology\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology))

- **$n=2$  compatto:** si è giunti ad una classificazione grazie al contributo di numerosi matematici tra cui Riemann, Moebius, Klain, Poincaré, Seifert, Jordan.  
La formulazione del teorema di classificazione, nella forma che vedremo noi, è di Von Dick (1888) mentre la dimostrazione è di Brahana (1921).

**non compatto:** il teorema di classificazione è stato formulato inizialmente da Kerékjártò (1922-1923) e poi sistemato da Richards (1963).

## UN PO' DI STORIA II

- $n=3$  ancora irrisolto. La ricerca di un teorema di classificazione risale agli inizi del 1900 (Poincaré). Sono stati fatti tentativi con tecniche molto diverse fra loro: rivestimenti (Monstersinos, Hilden), decomposizioni di Heegaard, cristallizzazioni (Pezzana).  
 Negli anni '70 Thurston introduce un approccio completamente diverso, che fa uso di strutture geometriche, e formula la sua famosa *Congettura di Geometrizzazione*.  
**Nel 2003 (2006) Perelman dimostra la congettura: questa non implica la classificazione (implica però la Congettura di Poincaré) ma la riduce al caso della classificazione delle varietà iperboliche. In questi anni diversi progressi sono stati fatti (ad esempio nel 2012 Ian Agol dimostra la virtually Haken conjecture), ma ancora il problema è aperto.**

[https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrization\\_conjecture](https://en.wikipedia.org/wiki/Geometrization_conjecture)
- $n>3$  risolto in senso negativo. Nel 1958 Markov dimostra che non può esistere un algoritmo finito di classificazione utilizzando un risultato di non esistenza di una classificazione dei gruppi finitamente generati (Adjan, 1955).

## IL CASO DELLE SUPERFICI

**Teorema 1.** *Sia  $S$  una superficie chiusa (cioè compatta e senza bordo) e connessa. Allora vale una delle seguenti affermazioni:*

1.  $S \cong \mathbb{S}^2$ ;
2. esiste  $g \geq 1$  tale che  $S \cong T_g$ , dove  $T_g$  indica la somma connessa di  $g$  tori;
3. esiste  $g \geq 1$  tale che  $S \cong U_g$ , dove  $U_g$  indica la somma connessa di  $g$  piani proiettivi.

**Proposizione 1.** *Si ha:*

$$\begin{array}{l}
 \underline{H_0(\mathbb{S}^2) = H_0(T_g) = H_0(U_g) = \mathbb{Z};} \\
 \leftarrow \quad \underline{H_1(\mathbb{S}^2) = 0, \quad H_1(T_g) = \bigoplus_{i=1}^{2g} \mathbb{Z}, \quad H_1(U_g) = \mathbb{Z}_2 \oplus \bigoplus_{i=1}^{g-1} \mathbb{Z};} \quad \leftarrow \\
 \underline{H_2(\mathbb{S}^2) = H_2(T_g) = \mathbb{Z}, \quad H_2(U_g) = 0.}
 \end{array}$$

**Corollario 1.** *Siano  $S$  e  $S'$  due superfici chiuse e connesse. Allora*

$$S \cong S' \Leftrightarrow H_1(S) \cong H_1(S').$$

## GENERE DI UNA SUPERFICIE

PRIVE di AUTOINTERSEZIONI

Il *genere* di una superficie è il massimo numero di curve semplici chiuse lungo le quali si può tagliare la superficie senza disconnetterla. Ovviamente il genere di una superficie è un invariante per omeomorfismo.

Un esercizio non del tutto banale è mostrare che

se  $S$  è orientabile

$$g(S) \leq r(H_1(S)) \text{ e } g(S \# S') = g(S) + g(S').$$

se  $S$  e  $S'$  sono entrambe orientabili oppure entrambe non orientabili

Con un altro po' di lavoro si può ottenere che

$$g(T_g) = g(U_g) = g, \quad g(S^2) = 0.$$

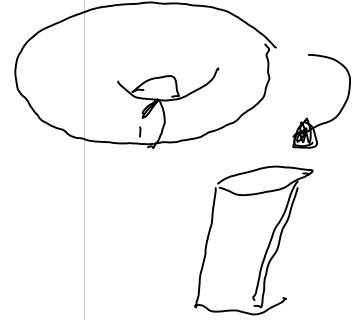
Il calcolo del genere della sfera è dovuto a Jordan che ha dimostrato il seguente teorema.

[https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan\\_curve\\_theorem](https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem)

**Teorema 2.** Ogni curva semplice chiusa divide la sfera in due regioni ognuna delle quali è omeomorfa ad un disco.

Il genere di una superficie è in realtà legato ad un altro invariante già visto e cioè alla caratteristica di Eulero.

**Proposizione 2.** Sia  $S$  una superficie chiusa e connessa. Si ha  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$ , se  $S$  è orientabile e  $\chi(S) = 2 - g(S)$ , se  $S$  non è orientabile.



Tg



Dal calcolo del genere e dal Teorema 1 si ottiene la seguente classificazione delle superfici.

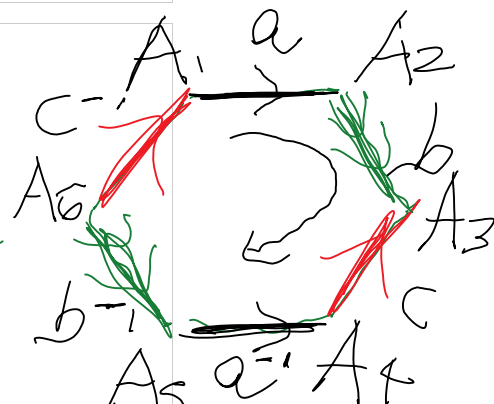
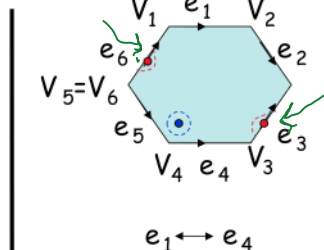
**Teorema 3 (Van Dick).** Siano  $S$  e  $S'$  due superfici chiuse e connesse. Allora  $S \cong S'$  se e solo se  $S$  e  $S'$  hanno lo stesso genere e lo stesso carattere di orientabilità.

Ci sono varie dimostrazioni del Teorema 1. Quella che vedremo noi utilizza la rappresentazione delle superfici tramite incollamento dei lati di un poligono. Quindi prima di analizzare la dimostrazione vediamo come possibile costruire superfici partendo da poligoni piani.

## SUPERFICI E POLIGONI

Sia  $\mathcal{E}$  un poligono regolare con un numero pari di lati  $e_1, e_2, \dots, e_{2n}$ .

- 1) scegliamo un senso di percorrenza su ogni lato e chiamiamo  $V_k$  il vertice iniziale del lato  $k$ .
- 2) scegliamo un accoppiamento tra i lati del poligono.



del lato  $k$ .  
 2) scegliamo un accoppiamento tra i lati del poligono.  
 Sia  $\sim$  la relazione di equivalenza sull'insieme dei punti di  $E$  definita da  $P \sim P'$  se  
 $P=P'$  oppure  $P \in e_k, P' \in e_h, e_k e e_h$  sono lati accoppiati e  $V_k P = V_h P'$ .

Allora  $E/\sim$  è una superficie. *Verifichiamolo:*

$[P] = \{P\}$  se  $P$  è interno.

$[P] = \{P, P'\}$  se  $P$  e  $P'$  sono punti interni di lati accoppiati.

Infine se  $P$  è un vertice del poligono la cardinalità di  $[P]$  dipende dalle scelte fatte, ma in ogni caso è facile verificare che l'unione degli interni dei punti in  $[P]$  forma un disco.

$$v_4 \quad e_4 \quad v_3$$

$$e_1 \leftrightarrow e_4$$

$$e_2 \leftrightarrow e_5$$

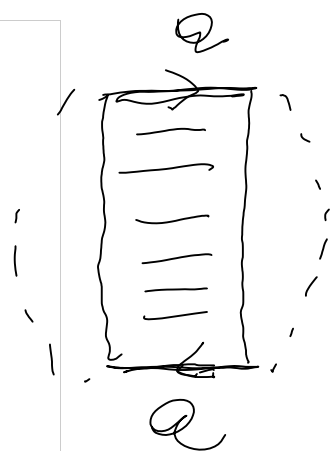
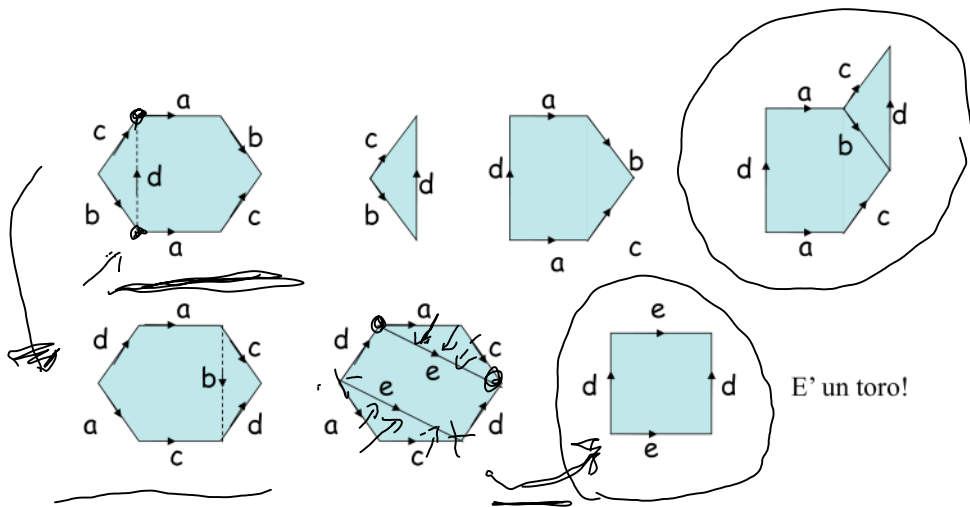
$$e_3 \leftrightarrow e_6$$

Quale superficie è?

$$[A_1] = \{A_1, A_3, A_5\}$$

$$[A_2] = \{A_2, A_4, A_6\}$$

$$\chi = 2 - 3 + 1 = 0$$



Osserviamo che i lati del poligono determinano un grafo sulla superficie e tutte le operazioni fatte (tranne l'ultima) cambiano il grafo, ma non la superficie. L'ultima operazione consiste in un omeomorfismo di poligoni che passa al quoziente, determinando quindi un omeomorfismo di superfici.

Siamo ora in grado di dimostrare il Teorema 1.

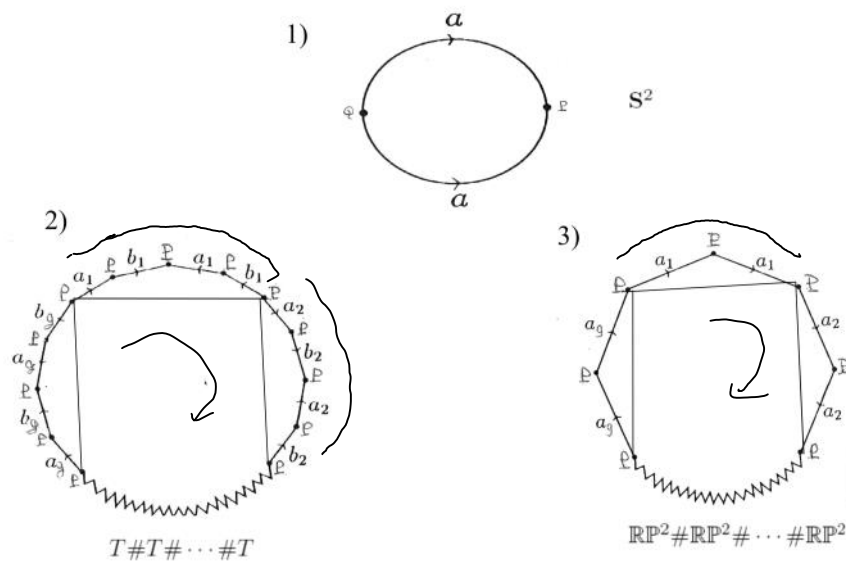
*Dimostrazione del Teorema 1.* La dimostrazione è divisa in tre parti:

1. ogni superficie può essere ottenuta come quoziente di un poligono;
2. ogni quoziente di poligono può essere portato in una forma canonica;
3. le superfici ottenute come quoziente delle forme canoniche corrispondono a quelle dell'enunciato.

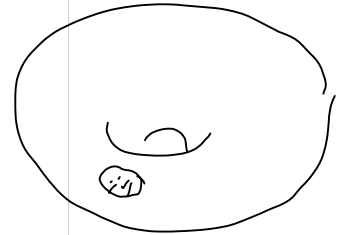
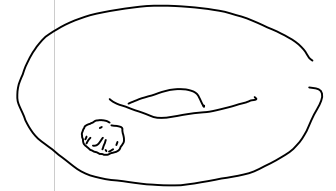
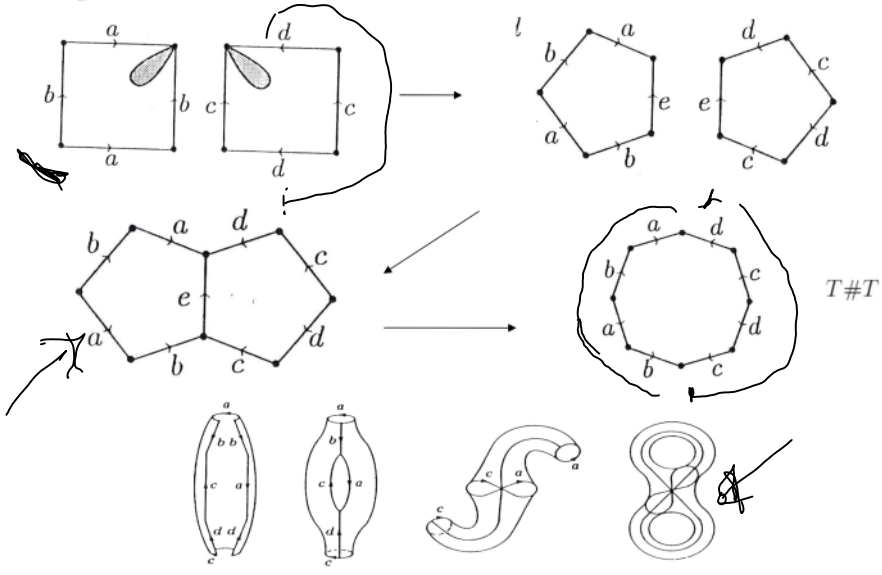
*Parte 1* Data una superficie  $S$  consideriamo una sua triangolazione (le categorie Top e PL coincidono in dim 2 quindi ogni superficie è triangolabile). Tagliamo la superficie lungo tutti i triangoli che compongono la triangolazione etichettando i lati in modo da avere memoria degli incollamenti. Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione del Teorema 9 del libro, è sempre possibile scegliere una triangolazione che soddisfi alle condizioni di purezza, non ramificazione e connessione forte. Questo ci garantisce che dopo il taglio i lati dei triangoli sono identificati a coppie. A questopunto non è difficile verificare che partendo da un triangolo qualsiasi è possibile riattaccare via via tutti gli altri triangoli fino a formare un poligono piano che avrà i lati identificati a coppie, come voluto.

Pag 41 delle dispense

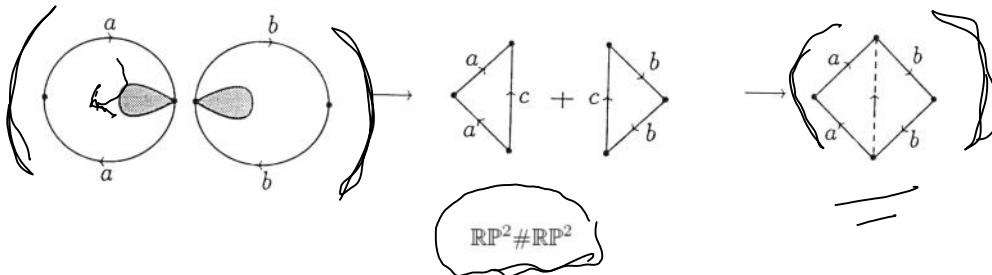
*Parte 3* Dato un poligono con i lati identificati a coppie dimostreremo nella Parte 2 che è possibile ricondurlo ad una delle seguenti forme canoniche:



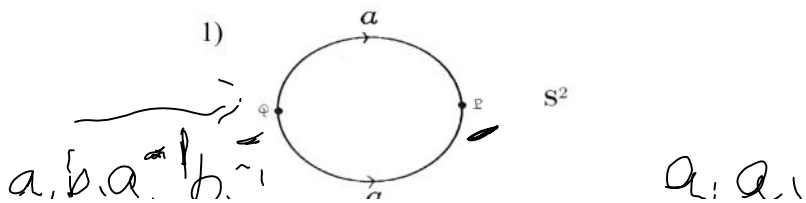
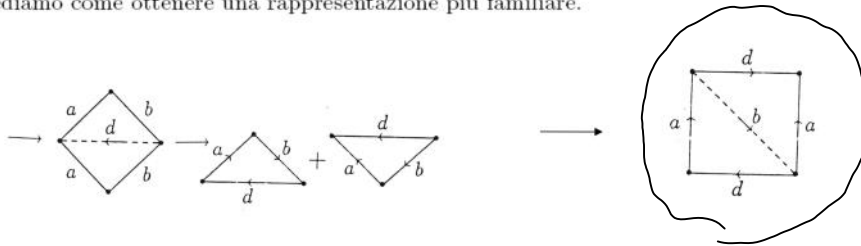
Prima di farlo vediamo che superfici rappresentano tali forme canoniche. La prima forma canonica rappresenta ovviamente la sfera. Per quanto riguarda la seconda, dalla figura seguente si evince che il quoziente è la somma connessa di  $g$  tori.



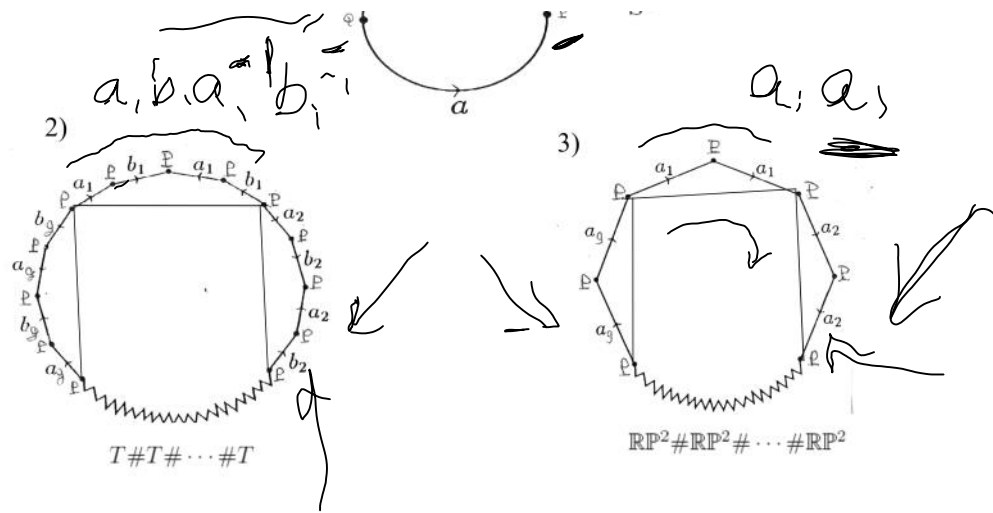
Infine dalla figura sotto si deduce che il quoziente della terza forma canonica è la somma connessa di  $g$  piani proiettivi.



In realtà  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  è omeomorfo alla bottiglia di Klein. In questa figura vediamo come ottenere una rappresentazione più familiare.

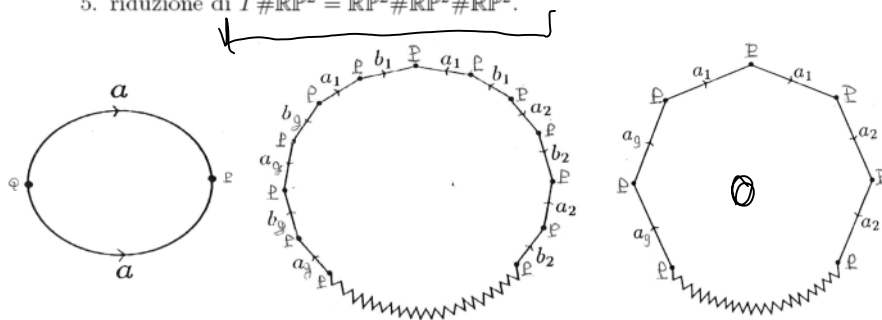




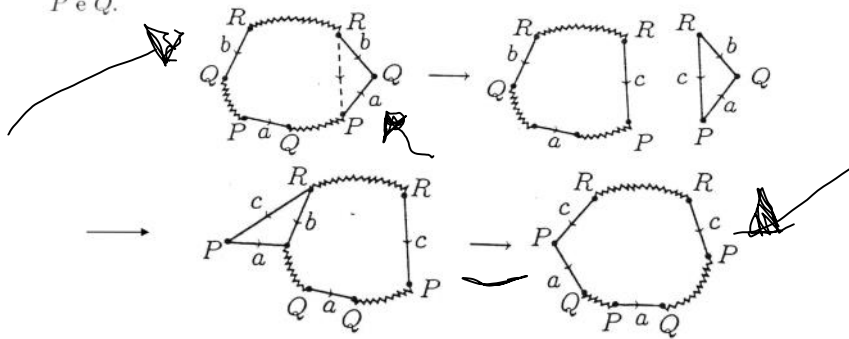


Parte 2 Ora dimostriamo che ogni poligono con i lati identificati a coppie può essere ricondotto ad una delle forme canoniche. Per farlo procederemo per passi:

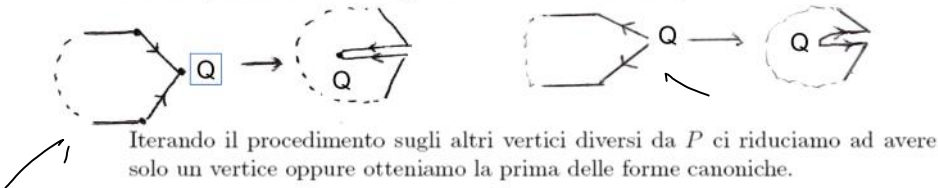
1. riduzione ad un unico vertice o alla prima delle forme canoniche;
2. avvicinamento delle coppie twistate;
3. avvicinamento dei quartetti incrociati non twistati;
4. eliminazione delle coppie non twistate;
5. riduzione di  $T \# \mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ .



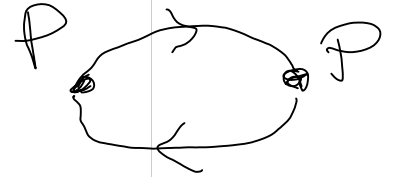
*Passo 1* Supponiamo di avere un'identificazione con almeno due vertici distinti  $P$  e  $Q$ .



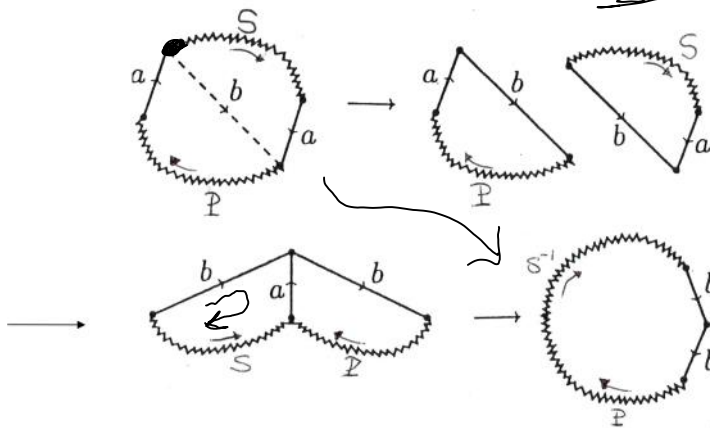
Otteniamo un poligono con un vertice  $Q$  in meno ed un vertice  $P$  in più. Ripetendo la trasformazione, in un numero finito di passi, ci riduciamo ad avere solo un vertice  $Q$ . Se abbiamo solo due lati allora otteniamo la prima delle forme canoniche altrimenti possiamo eliminare del tutto  $Q$  con la seguente trasformazione (eliminazione di coppie non twistate adiacenti)



Iterando il procedimento sugli altri vertici diversi da  $P$  ci riduciamo ad avere solo un vertice oppure otteniamo la prima delle forme canoniche.

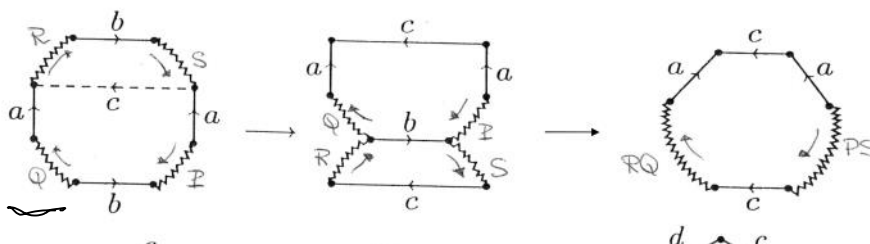


*Passo 2* Una coppia twistata è costituita da due lati del tipo  $SaPa$ . Considero la trasformazione seguente:



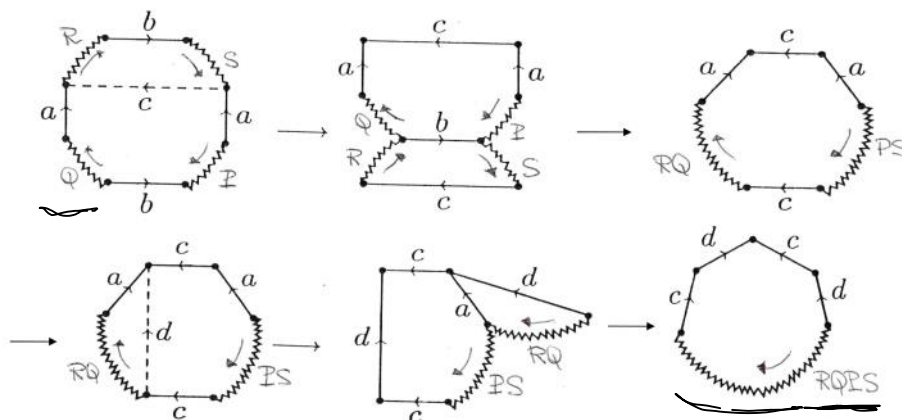
In tal modo dato un poligono con una coppia twistata qualsiasi ne ottengo uno in cui i lati che costituiscono la coppia twistata sono adiacenti ( $SaPa \rightarrow bbPS^{-1}$ ). Inoltre, questa trasformazione non distrugge eventuali coppie twistate adiacenti preesistenti. Quindi in un numero finito di passi otteniamo un poligono in cui tutte le coppie twistate sono costituite da lati adiacenti.

*Passo 3* Un quartetto incrociato non twistato è costituito da quattro lati del tipo  $Sb^{-1}Pb^{-1}QaRb$ . Considero la trasformazione seguente:



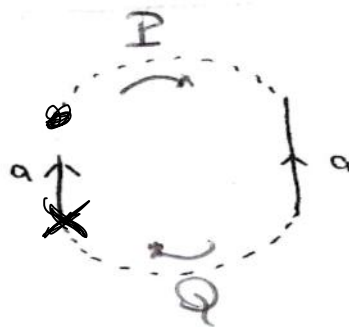


*Passo 3* Un quartetto incrociato non twistato è costituito da quattro lati del tipo  $Sb^{-1}Pb^{-1}QaRb$ . Considero la trasformazione seguente:



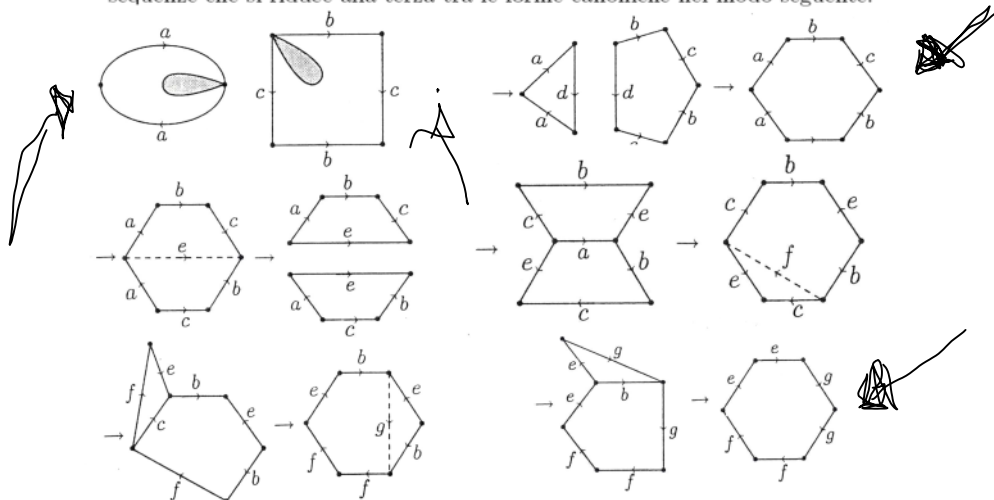
In tal modo dato un poligono con un quartetto incrociato non twistato qualsiasi ne ottengo uno in cui i lati che costituiscono il quartetto sono adiacenti ( $Sb^{-1}Pb^{-1}QaRb \rightarrow cdc^{-1}d^{-1}RQPS$ ). Inoltre, questa trasformazione non distrugge eventuali quartetti incrociati non twistati adiacenti preesistenti. Quindi in un numero finito di passi otteniamo un poligono in cui tutti i quartetti incrociati non twistati sono costituiti da lati adiacenti.

*Passo 4* Ora tutte le coppie twistate sono costituite da lati adiacenti, ma a priori potrei avere coppie non twistate non adiacenti (quelle adiacenti possono essere eliminate vedi passo 1).



Dai passi 2 e 3 segue che i lati identificati diversi da  $a$  stanno entrambi in  $P$  o entrambi in  $Q$ . Quindi il vertice iniziale ed il vertice finale di  $a$  sono diversi tra loro che è assurdo per il passo 1.

Passo 5 Ora il mio poligono è costituito solo da: 1) coppie twistate con lati adiacenti oppure 2) quartetti incrociati non twistati con lati adiacenti. Se contiene sequenze di lati solo del tipo 1) corrisponde alla terza delle forme canoniche. Se invece contiene sequenze di lati solo del tipo 2) corrisponde alla seconda delle forme canoniche. Rimane da analizzare il caso in cui compaiono entrambe le sequenze che si riduce alla terza tra le forme canoniche nel modo seguente:



Si noti che tale riduzione corrisponde a  $T \# \mathbb{RP}^2 \cong \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ .

## Gruppo fondamentale delle superfici compatte

Calcoliamo i gruppi fondamentali delle superfici  $T_g$  e  $U_g$ .

Sappiamo che  $\pi(S^2)$  è il gruppo banale; consideriamo dunque la superficie  $T_g$ , con  $g > 1$ .

Per applicare il teorema di Seifert-Van Kampen consideriamo un poligono  $P_g$  con  $2g$  lati interno al poligono che individua  $T_g$ . Scegliamo poi come poliedro  $K$  la superficie  $T_g$  privata dell'interno di  $P_g$ , mentre come poliedro  $H$  la superficie  $P_g$  stessa;  $T_g = H \cup K$ . Consideriamo le inclusioni simpliciali  $i_H : H \hookrightarrow T_g$  e  $i_K : K \hookrightarrow T_g$ , otteniamo i corrispondenti omomorfismi dei gruppi fondamentali:  $\pi(i_H) : \pi(H) \rightarrow \pi(T_g)$  e  $\pi(i_K) : \pi(K) \rightarrow \pi(T_g)$ .

Il poliedro  $K$  ha il bordo del poligono che individua  $T_g$ , (che è un bouquet di  $2g$  circonferenze), come retratto di deformazione; e quindi otteniamo la seguente presentazione di  $\pi(K)$ :

$$\pi(K) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \dots a_g, b_g | \emptyset \rangle$$

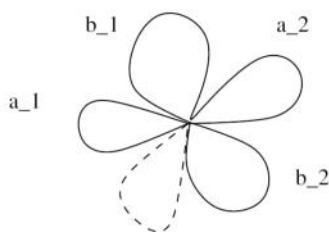
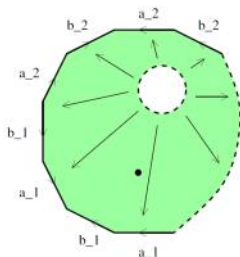
mentre  $\pi(H)$  è il gruppo banale.

L'intersezione  $K \cap H$  è omeomorfa ad una circonferenza che viene portata dalla retrazione di  $K$  nel bouquet di  $2g$  petali nel coppia  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$ . Applicando ora il teorema di Seifert-Van Kampen otteniamo:

$$\pi(T_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \dots a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

In modo del tutto analogo si può calcolare il gruppo fondamentale delle superfici  $U_g$  arrivando alla seguente conclusione:

$$\pi(U_g) = \langle a_1, a_2, \dots, a_g \mid (a_1)^2 (a_2)^2 \dots (a_g)^2 \rangle$$



Abelianizzando i gruppi fondamentali otteniamo

$$H_1(T_g) = Z^{2g} \quad H_1(U_g) = Z^{g-1} \oplus Z_2$$

Infatti nel caso delle superfici orientabili  $T_g$  la relazione  $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1}$  risulta un prodotto di commutatori del gruppo e appartiene quindi al derivato del gruppo stesso.

Nel caso delle superfici non orientabili  $U_g$ , possiamo operare con due trasformazioni di Tietze sull'abelianizzato di  $\pi(U_g)$

passo 1 aggiungiamo il generatore  $z = (a_1)(a_2) \dots (a_g)$  e otteniamo il nuovo generatore  $z$  con la relazione  $z^2$

passo 2 il generatore  $a_1$  può essere scritto come  $a_1 = z(a_2)^{-1} \dots (a_g)^{-1}$  e può quindi essere rimosso.