Assiomi di omologia e coomologia di Eilenberg-Steenrod

1. L'omologia simplicale è stata definita per i complessi simpliciali.
2. I gruppi di omologia di un complesso di simpliciale dipendono solamente dalla sua realizzazione geometrica, non dalla triangolazione.
3. Altre "teorie di omologia" sono state definite su varie sottocategorie di spazi topologici. (omologia singolare, coomologia di De Rham, omologia di Čech, omologia cellulare,…) La sottocollezione di spazi sulla quale ogni teoria è definita è diversa, ma tutte hanno proprietà simili:

   sono tutte definite per i poliedri (cioè per le realizzazioni di complessi simpliciali finiti)

   hanno gli stessi di gruppi $H(X)$ per ogni poliedro X.
4. Eilenberg e Steenrod enunciarono il concetto formale di una "teoria di omologia (co-omologia)" dando un insieme di assiomi cui deve soddisfare una tale teoria. Provarono cioè, che ogni teoria che soddisfa tali assiomi, associa ad ogni poliedro X gli stessi gruppi $H(X)$.

Assiomi di omologia di Eilenberg-Steenrod

- $\mathbf{Top_2}$ è la categoria delle coppie di spazi topologici:

  la coppia (X, A) è lo spazio X con un sottospazio A (la coppia: X modulo A),

  una funzione $f : (X, A) \to (Y, B)$ è una funzione $f : X \to Y$ tale che $f(A) \subseteq B$.

- $\mathbf{Top}$ è immersa in $\mathbf{Top_2}$ identificando lo spazio X con la coppia $(X, \emptyset)$.

- Il Funtore dimenticante $T : \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Top}$ associa alla coppia (X, A) lo spazio A.

- Una omotopia $F : f_0 \simeq f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ tra coppie di funzioni è una mappa di coppie tale che: $F : (I \times X, I \times A) \to (Y, B)$,

  $F(\alpha, x) = f_\alpha(x), \qquad \forall x \in X \qquad (\alpha = 0, 1);$

  questa è equivalente ad una omotopia ordinaria

  $F : f_0 \simeq f_1 : X \to Y$ tale che $F(I \times A) \subseteq B$.

- I termini in $\mathbf{Top}$ (oggetti, funzioni, omotopie, gruppi di omologia ...) sono detti assoluti;

- I termini in $\mathbf{Top_2}$ sono detti relativi.

Una teoria omologica astratta è data da:

1. per ogni coppia di spazi topologici (X, A), una successione $H_n(X, A)$ di gruppi abeliani,
2. per ogni mappa $f : (X, A) \to (Y, B)$, una successione di omomorfismi $(f_\star)_n : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$,
3. per ogni coppia (X, A), una successione $\partial_n : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, \emptyset)$ di omomorfismi

in modo che siano verificate le seguenti proprietà (scrivendo $H_n(X)$ per $H_n(X, \emptyset)$):

- Funtorialità.

  Si genera una successione di funtori $H_n : \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$;

  in altre parole:

  1. $((id_{(X,A)})_\star)_n = id_{H_n(X,A)}$
  2. $((gf)_\star)_n = (g_\star)_n (f_\star)_n$ per f, g componibili.

- Naturalità.

  Per $f : (X, A) \to (Y, B)$, i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "(f_\star)_n"] \arrow[d, "\partial_n"'] & H_n(Y,B) \arrow[d, "\partial_n"] \\ H_{n-1}(A) \arrow[r, "(f'_\star)_n"'] & H_{n-1}(B) \end{tikzcd}$$

  dove f' è la restrizione di f.

  Questi tre primi assiomi si possono riassumere:

  Sia $\mathbf{Ab}$ la categoria dei gruppi abeliani graduati, allora esiste

1. un funtore covariante $H_\star : \mathbf{Top_2} \rightarrow \mathbf{Ab}$

   $(H_\star(X, A) = \{H_q(X, A) | q \in \mathbb{Z}\}$;

2. una trasformazione naturale ∂ di grado -1 dal funtore $H_\star$ al funtore $H_\star T$.

   $\partial(X, A) = \{\partial_q : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)\}$

- Esattezza.

  per ogni coppia (X, A), la successione seguente è esatta:

$$\ldots H_n(A) \xrightarrow{(u_\star)_n} H_n(X) \xrightarrow{(v_\star)_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A) \ldots$$

  dove $u : A \rightarrow X$ è l'inclusione di A in X e $v : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ è la mappa identica su X; ∂ è il morfismo legato alla trasformazione naturale (omomorfismo di connessione).

- Invarianza dell'omotopia.

  Se $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sono omotope, allora

  $(f_\star)_n = (g_\star)_n : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B) (n \geq 0)$.

- Escissione.

  Se $U \subseteq A \subseteq X$ e $cl(U) \subseteq int(A)$, allora la mappa inclusione

  $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo per ogni grado di omologia.

- Dimensione. $H_n(*) = 0$ per tutti gli $n \neq 0$.

Commenti

- Il gruppo abeliano $H_0(*)$ è chiamato: gruppo dei coefficienti della teoria.

- È stato dimostrato, nel corso di topologia algebrica, che l'omologia simpliciale e singolare relativa a coefficienti interi è una teoria omologica: il suo gruppo dei coefficienti è $\mathbb{Z}$ (a meno di isomorfismi).

- Per ogni gruppo abeliano G, costruiamo una teoria di omologia singolare relativa a coefficienti in G. Questo richiede l'uso del prodotto tensore di gruppi abeliani.

Assiomi di coomologia di Eilenberg-Steenrod

In modo analogo si possono dare gli assiomi per la coomologia.

Una teoria coomologica astratta è data da:

1. per ogni coppia di spazi topologici (X, A), una successione $H^n(X, A)$ di gruppi abeliani,
2. per ogni mappa $f : (X, A) \to (Y, B)$, una successione di omomorfismi $(f_\star)^n : H^n(X, A) = H^n(Y, B)$,
3. per ogni coppia (X, A), una successione $\delta^n : H^n(X, A) = H^{n+1}(A, \emptyset)$ di omomorfismi,

in modo che siano verificate le seguenti proprietà (scrivendo $H^n(X)$ per $H^n(X, \emptyset)$):

- Funtorialità.

  Si genera una successione di funtori $H^n : \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$;

  in altre parole:

  1. $((id_{(X,A)})_\star)_n = id_{H_n(X,A)}$
  2. $((gf)_\star)_n = (g_\star)_n(f_\star)_n$ per f, g componibili.

- Naturalità.

  Per $f : (X, A) \to (Y, B)$, i seguenti diagrammi commutano:

$$\begin{tikzcd} H^n(X, A) \arrow[r, "(f_\star)^n"] \arrow[d, "\delta^n"'] & H^n(Y, B) \arrow[d, "\delta^n"] \\ H^{n+1}(A) \arrow[r, "(f'_\star)^n"'] & H^{n+1}(B) \end{tikzcd}$$

dove f' è la restrizione di$f$.

Questi tre primi assiomi si possono riassumere:

Sia **Ab** la categoria dei gruppi abeliani graduati, allora esiste

1. un funtore controvariante $H_\star : \mathbf{Top_2} \to \mathbf{Ab}$

   $(H^\star(X,A) = \{H^q(X,A)|q \in \mathbb{Z}\}$;

2. una trasformazione naturale δ di grado $+1$ dal funtore $H^\star$ al funtore $H^\star T$.

   $\delta(X,A) = \{\delta^q : H^n(X,A) \to H^{n+1}(A)\}$

- Esattezza.

  per ogni coppia (X,A), la successione seguente è esatta

$$\dots H^n(A) \xrightarrow{(u_\star)^n} H^n(X) \xrightarrow{(v^\star)^n} H^n(X,A) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(A) \dots$$

  dove $u : A \to X$ è l'inclusione di A in X e $v : (X,\emptyset) \to (X,A)$ è la mappa identica su X; δ è l'omomorfismo di connessione.

- Invarianza dell'omotopia.

  Se $f,g : (X,A) \to (Y,B)$ sono omotope, allora (3) $(f_\star)^n = (g_\star)^n : H^n(X,A) \to H^n(Y,B)(n \geq 0)$.

- Escissione.

  Se $U \subseteq A \subseteq X$ e $cl(U) \subseteq int(A)$, allora la mappa inclusione

  $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X,A)$ induce un isomorfismo per ogni grado di coomologia.

- Dimensione. $H^n(*) = 0$ per tutti gli $n \neq 0$.

Teorema (di unicità dell'omologia – coomologia)

Siano $\{(H_\star, \partial_\star)\}$ $(\{(H^\star, \delta^\star)\})$ e $\{(H'_\star, \partial'_\star)\}$ $(\{(H'^\star, \delta'^\star)\})$ due teorie di omologia (coomologia) e siano G e G' i rispettivi gruppi dei coefficienti.

Se $h_0 : G \to G'$ è un omomorfismo di gruppi, esiste una unica trasformazione naturale h tra i funtori $H_\star$ e $H'_\star$ compatibile con ∂ ($H^\star$ e $H'^\star$ compatibile con δ) ristretti alla categoria dei CW-complessi che estenda h_0.

Corollario

Se h_0 del teorema precedente è un isomorfismo, la trasformazione naturale associata è un isomorfismo.