Categorie e funtori

La teoria delle categorie si è dimostrata un potente linguaggio per esprimere alcuni fatti e costruzioni generali che si incontrano in particolare in topologia algebrica e in molte altre branche dell'algebra e della geometria. Qui ne diamo una introduzione elementare limitandoci alle definizioni ed esempi più semplici.

Definizione. Una *categoria* $\mathbf{C}$ consiste dei seguenti dati:

1. Una classe $ob(\mathbf{C})$ i cui elementi vengono chiamati oggetti della categoria.
2. Per ogni coppia A, B di oggetti in $ob(\mathbf{C})$, un insieme indicato con $Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ o con $\mathbf{C}(A, B)$, detto insieme dei morfismi da A a B. Invece di scrivere $f \in Hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ si usa porre $f : A \to B$.
3. Per ogni terna di oggetti A, B, C una composizione

   $Hom_{\mathbf{C}}(A, B) \times Hom_{\mathbf{C}}(B; C) \to Hom_{\mathbf{C}}(A, C)$
4. Per ogni oggetto A un morfismo speciale $1_A \in Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ detto identità di A.

Si suppone inoltre che valgano i seguenti assiomi.

- La composizione è associativa (dove è definita).
- L'identità agisce come elemento neutro per la composizione (dove è definita).

Le categorie che sono più note (ma ce ne sono molte altre) sono quelle in cui possiamo interpretare i morfismi come particolari funzioni fra insiemi, la loro composizione è la usuale composizione di funzioni, la identità l'usuale identità.
In particolare abbiamo:

1. La categoria degli insiemi indicata con il simbolo **Set** in cui i morfismi sono funzioni arbitrarie $\mathbf{Set}(A, B) = B^A$.
2. Gli insiemi su cui opera un gruppo G fissato ed i G morfismi.
3. **Grp** I gruppi con morfismi gli omomorfismi.
4. **Ab** I gruppi abeliani con morfismi gli omomorfismi.
5. **VK** Gli spazi vettoriali su un campo K e morfismi le applicazioni lineari.

6. Gli anelli, i moduli su un anello, gli spazi vettoriali con i relativi omomorfismi.

7. **Top** Gli spazi topologici con morfismi le funzioni continue.

8. **Top$_\star$** Gli spazi topologici puntati (X, x_0), dove $x_0 \in X$, con morfismi le funzioni continue che conservano il punto.

9. **Top$_\mathbf{2}$** Le coppie di di spazi topologici (X, A), dove $A \subseteq X$, con morfismi $f : (X, A) \to (Y, B)$ le funzioni continue $f : X \to Y$, tali che $f(A) \subseteq B$.

10. I rivestimenti di uno spazio dato ed i morfismi di rivestimenti.

11. I complessi simpliciali con i morfismi simpliciali.

12. **HT** gli spazi topologici con morfismi le classi di omotopia di funzioni come morfismi.

13. **Pos** gli insiemi parzialmente ordinati e le funzioni non decrescenti.

Un primo esempio di categoria in cui i morfismi non possono essere pensati come semplici funzioni è la Categoria omotopica, **HT** i cui oggetti sono spazi topologici ed i morfismi sono classi di omotopia di funzioni continue.
Un altro esempio è dato dalla categoria in cui gli oggetti sono i numeri naturali e i morfismi tra n e m sono le matrici con n righe e m colonne; la composizione è il prodotto riga per colonna di matrici. Un ulteriore esempio semplice è quello associato ad uno spazio parzialmente ordinato. Ricordiamo che un insieme parzialmente ordinato è un insieme con una relazione binaria detta ordinamento ed indicata con $a \leq b$ che verifica le proprietà

transitiva $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$;
riflessiva $a \leq a$,
ed antisimmetrica $(a \leq b \wedge b \leq a) \Rightarrow a = b$.

Un insieme parzialmente ordinato si pensa come categoria i cui oggetti sono gli elementi dell'insieme e, dati due elementi dell'insieme a, b, se $a \leq b$, allora $Hom(a, b)$ ha un unico elemento altrimenti $Hom(a, b) = \emptyset$, la riflessività è l'assioma dell'identità, la transitività è l'associatività unita all'esistenza della legge di composizione.
In ogni categoria $\mathbf{C}$, per ogni fissato $A \in ob(\mathbf{C})$, $Hom_{\mathbf{C}}(A, A)$ è un monoide (semigruppo) con elemento neutro rispetto alla composizione. Viceversa, dato un semigruppo S con elemento neutro , si può considerare una categoria con un unico oggetto $\star$, e $Hom_{\mathbf{C}}(\star, \star)$ formato dagli elementi di S.

Isomorfismi, retrazioni e sezioni.

Sia **C** una categoria, e siano X, Y oggetti di **C**.
Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ due morfismi; se $g \circ f = id_X$ si dice che g è *inverso sinistro* di f, mentre se $f \circ g = id_Y$ si dice che g è *inverso destro* di f.
Se g è inverso sia destro che sinistro di f, cioè se $g \circ f = id_X$ ed $f \circ g = id_Y$, allora si dice che g è l'*inverso* di f e si scrive $g = f^{-1}$; i morfismi che ammettono inverso si dicono *isomorfismi.* I morfismi che hanno inverso sinistro si dicono *sezioni*, quelli che hanno un inverso destro si dicono *retrazioni.*
In generale sezioni e retrazioni non hanno inversi unici.
Un isomorfismo, invece, ha un unico inverso; si ha anzi:

Proposizione: se $f : X \to Y$ ha un inverso sinistro $g_1 : Y \to X$ ed un inverso destro $g_2 : Y \to X$, allora $g_1 = g_2$, inoltre f è un isomorfismo, il cui inverso è $f^{-1} = g_1 = g_2$.
Dimostrazione. Se $g_1 \circ f = id_X$ si moltiplica l'uguaglianza a destra per g_2 ottenendo $(g_1 \circ f) \circ g_2 = id_X \circ g_2 = g_2$; ma $g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ id_Y = g_1$, quindi $g_1 = g_2$.

Nella categoria **Top**, gli isomorfismi sono chiamati omeomorfismi; nella categoria **HT** degli spazi topologici con classi di omotopia di funzioni come morfismi, gli isomorfismi sono detti equivalenze omotopiche. Gli spazi contraibili sono quelli che hanno il tipo di omotopia di uno spazio con un singolo punto.

Una delle idee potenti della teoria delle categorie è quella di trattare (con qualche cautela logica) le categorie come oggetti di una nuova categoria: la categoria delle categorie. Per fare questo occorre definire i morfismi fra categorie, cioè i funtori.

Definizione. Un *funtore (covariante)* $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ dalla categoria **A** alla categoria **B** è

- una funzione tra $ob(\mathbf{A})$ e $ob(\mathbf{B})$; associa quindi ad ogni oggetto X di **A** un oggetto $F(X)$ di **B**
- una funzione che associa ad ogni morfismo $f : X \to Y$ in **A** un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ (in **B**) in modo tale che
  1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$(quando la composizione è definita).
  2. $F(id_X) = id_F(X)$.

È chiaro che si può fare la composizione di funtori come nel caso delle funzioni.

Si possono definire anche i *funtori controvarianti* imponendo che ad ogni morfismo $f : X \to Y$ sia associato un morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$ in modo tale che si abbia $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.
Come si fa in teoria dei gruppi e degli anelli si può definire la categoria opposta $\mathbf{C^{op}}$ di una categoria data $\mathbf{C}$, i cui oggetti sono gli stessi di $\mathbf{C}$ mentre $Hom_{\mathbf{C^{op}}}(A, B) = Hom_{\mathbf{C}}(B, A)$.
Si vede facilmente che un funtore contravariante da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ è anche covariante da $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}^{op}$ (o da $\mathbf{A}^{op}$ a $\mathbf{B}$). Per poter definire la categoria di tutte le categorie prendendo i funtori come morfismi bisogna essere certi che i funtori fra due categorie date formino un insieme: questo non è vero in generale; una strada che si segue per evitare di cadere nelle contraddizioni della teoria degli insiemi consiste nel restringersi alle categorie piccole ovvero categorie in cui la classe degli oggetti sia un insieme. In questo caso i funtori fra due categorie piccole formano un insieme e non vi sono difficoltà a considerare la categoria in cui gli oggetti siano le categorie piccole ed i morfismi i funtori. L'unica difficoltà di questo approccio si trova nel fatto che insiemi, gruppi ecc. non sono categorie piccole, non è difficile però sostituire tali categorie con categorie piccole che in pratica sono altrettanto utilizzabili, ad esempio si può prendere invece della categoria di tutti gli insiemi solo i sottoinsiemi di un insieme di cardinalità suffientemente elevata da permettere di svolgere all'interno di tale insieme di insiemi tutte le operazioni di cui si ha bisogno; lo stesso si dica per i gruppi o gli spazi topologici.

Esempi di funtori

1. $\mathbf{U} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, il funtore dimenticante che associa ad ogni spazio topologico l'insieme sottogiacente.

2. La realizzazione geometrica è un funtore dalla categoria dei complessi simpliciali a quella degli spazi topologici.

3. Fissato un campo K, ad ogni insieme A si associa $K[A]$ lo spazio vettoriale costruito prendendo A come base. Si ottiene così un funtore $\mathbf{k}$ dalla categoria degli insiemi a quella degli spazi vettoriali sopra un campo K. Infatti ad ogni funzione tra due insiemi resta associata una trasformazione lineare tra gli spazi vettoriali corrispondenti.

4. Data una categoria $\mathbf{A}$, e fissato un oggetto A di $\mathbf{A}$, si definisce il funtore $\mathbf{F} = Hom(A, -) : \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$ come segue

Ad ogni oggetto X si associa l'insieme $Hom(A, X)$.

Ad ogni morfismo $f \in Hom(X, Y)$ si associa la funzione

$F(f) = Hom(A, f) : Hom(A, X) \to Hom(A, Y)$ definita da

$F(f)(\alpha) = Hom(A, f)(\alpha) = f \circ \alpha$ per ogni $\alpha \in Hom(A, X)$.

La verifica che $Hom(A, -)$ è un funtore discende essenzialmente dall'associatività della composizione dei morfismi in $\mathbf{A}$.

Molti funtori covarianti sono in qualche modo legati a questo funtore. Ad esempio, se si prende $\mathbf{A} = \mathbf{Top}$, ed $A = I = [0, 1]$, $Hom(A, X) = C([0, 1]; X)$ è l'insieme dei cammini di X: il funtore associa ad ogni spazio X l'insieme $C([0, 1], X)$ dei suoi cammini, e ogni funzione $f \in C(X, Y)$ trasforma il cammino α di X nel cammino $f \circ \alpha$ di Y.

C'è naturalmente una costruzione analoga per i funtori controvarianti: fissato un oggetto B della categoria $\mathbf{A}$ si definisce un funtore controvariante $\mathbf{G} = Hom(-, B)$ nel modo seguente:

Ad ogni oggetto X si associa l'insieme $G(X) = Hom(X, B)$. Ad ogni morfismo $f \in Hom(X, Y)$ si associa la funzione $Hom(Y, B) \to Hom(X, B)$ definita da $G(f)(\alpha) = Hom(f, B)(\alpha) = \alpha \circ f$ per ogni $\alpha \in Hom(Y, B)$.

Applicando questa costruzione alla categoria $\mathbf{VK}$ dei K-spazi vettoriali, con $B = K$ si ottiene un importante funtore controvariante di $\mathbf{VK}$ in se stesso, la dualità canonica, indicato con $X \to X^\star$ a livello di oggetti, e con $f \to f^\star$ a livello di morfismi.

Tale funtore è a valori in $\mathbf{VK}$ anzichè nella categoria degli insiemi, perché $Hom_{\mathbf{VK}}(X, K) = Hom_K(X, K) = X^\star$ ha una naturale struttura di K-spazio vettoriale, e se $f : X \to Y$ è lineare anche $f^\star : Y^\star \to X^\star$, (trasposta di f), è K-lineare.

5. Si ha un funtore controvariante dalla categoria **Top** degli spazi topologici con funzioni continue alla categoria degli anelli commutativi con unità (con morfismi che conservano le unità) nel modo seguente:

   ad ogni spazio X si associa l'anello $C(X, R)$ delle sue funzioni continue a valori reali (questi sono muniti della loro topologia usuale; le operazioni sono definite puntualmente); ad ogni funzione continua $\beta : X \to Y$ si associa l'omomorfismo $\beta^\sharp : C(Y, R) \to C(X, R)$ definito da $\beta^\sharp(g) = g \circ \beta$.

Le seguenti proprietà sono conseguenza immediata degli assiomi di categoria.

Proposizioni.

Sia $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un funtore dalla categoria $\mathbf{A}$ nella categoria $\mathbf{B}$.

- Se $\mathbf{F}$ covariante e $f : A \to A'$ ha un inverso destro (sinistro), allora $\mathbf{F}(f) : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{F}(A')$, ha un inverso destro (sinistro).
- Se $\mathbf{F}$ controvariante e $f : A \to A'$ ha un inverso destro (sinistro), allora $\mathbf{F}(f) : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{F}(A')$, ha un inverso sinistro (destro).
- Se f è un isomorfismo anche $F(f)$ è un isomorfismo.

Dimostriamo la prima proposizione.
Sia $\mathbf{F}$ covariante e $f : A \to A'$ con inverso destro, cioè, esiste $g : A' \to A$ tale che $f \circ g = id_{A'}$, quindi $\mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g) = \mathbf{F}(id_{A'}) = id_{\mathbf{F}(A')}$.

Le altre proposizioni si dimostrano im modo analogo.

Per completare l'esposizione conviene introdurre l'ultima definizione formale, quella che permette di trattare i funtori fra due categorie date $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ come gli oggetti di una nuova categoria. Per fare ciò dobbiamo definire i morfismi fra due tali funtori, che chiameremo trasformazioni naturali. Diamo la definizione per funtori covarianti; il caso controvariante è simile.

Definizione. Dati due funtori $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ fra due categorie, una *trasformazione naturale* $\varphi : \mathbf{F} \to \mathbf{G}$ fra i due funtori consiste nel dare, per ogni oggetto $A \in ob(\mathbf{A})$ un morfismo $\varphi_A : \mathbf{F}(A) \to \mathbf{G}(A)$ (in $\mathbf{B}$) tale che, per ogni coppia di oggetti $A, A' \in ob(\mathbf{A})$ e per ogni morfismo $f : A \to A'$ il seguente diagramma sia commutativo.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \\
A'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{F}(A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\mathbf{F}(f)"'] & \mathbf{G}(A) \arrow[d, "\mathbf{G}(f)"] \\
\mathbf{F}(A') \arrow[r, "\varphi_{A'}"'] & \mathbf{G}(A')
\end{tikzcd}
$$

La classe delle trasformazioni naturali fra due funtori $\mathbf{F}, \mathbf{G} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ viene indicata con $\mathrm{Nat}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$.
Dalle idee generali date segue quella di isomorfismo naturale fra due funtori, ovvero una trasformazione naturale che ammetta una inversa, ed anche quella di equivalenza di categorie.
Una equivalenza fra le categorie $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ è una coppia di funtori covarianti $\mathbf{F} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $\mathbf{G} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tali che $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ sia naturalmente isomorfo alla identità di $\mathbf{A}$ e $\mathbf{F} \circ \mathbf{G}$ sia naturalmente isomorfo alla identità di $\mathbf{B}$. Sono in questa situazione, per esempio, la categoria opposta a quella di numeri e matrici e quella degli spazi vettoriali finitamente generati su un campo K.