# Lezioni del corso di Algebra e Geometria

dei professori
Massimo Ferri e Michele Mulazzani

A.A. 2000/2001

# Indice

# Capitolo 1

# Equazioni e sistemi lineari.

## NOTAZIONI.

$\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali (senza zero)
$\mathbb{N}^0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{N}_k = \{i \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leq i \leq k\}$
$\mathbb{Z}$ = insieme (e anello[1]) dei numeri interi
$\mathbb{Q}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri razionali
$\mathbb{R}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri reali
$\mathbb{C}$ = insieme (e campo[1]) dei numeri complessi

$\mathbb{K}$ indicherà un campo [1] (es. $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$)

*n-pla ordinata* di elementi di un insieme $A$: ogni applicazione da $\mathbb{N}_n$ ad $A$;
$A^n$ = insieme delle n-ple ordinate di elementi di $A$.

**Esempio.**
$(2, \pi, \sqrt{3}, 2) \in \mathbb{R}^4$ è l'applicazione da $\mathbb{N}_4$ ad $\mathbb{R}$ definita da:
$1 \mapsto 2,\ 2 \mapsto \pi,\ 3 \mapsto \sqrt{3},\ 4 \mapsto 2$

**ATTENZIONE:** non lasciatevi intimorire dal prossimo paragrafo! Vi sono accumulate delle nozioni astratte che introduciamo subito per comodità di terminologia, ma che saranno sviluppate volta per volta con esempi.

[1] Le nozioni di anello e di campo verranno precisate nel prossimo paragrafo.

## 1.1 Alcune strutture algebriche.

*Operazione binaria interna* su un insieme $A \neq \emptyset$: ogni applicazione dal prodotto cartesiano $A \times A$ (cioè l'insieme delle coppie ordinate di elementi di $A$) ad $A$.

NOTAZIONE: se $\top : A \times A \longrightarrow A$ è un'operazione, l'elemento che dovrebbe essere indicato $\top(a, b)$ verrà contrassegnato, come usuale, $a \top b$.

Una struttura algebrica $(A, \top)$, dove $\top$ è un'operazione binaria interna su $A$, PUÒ godere di alcune di queste proprietà:

1) proprietà *associativa* : $\forall a, b, c \in A$,

$$(a \top b) \top c = a \top (b \top c)$$

2) esistenza di un elemento neutro: $u \in A$ è *elemento neutro* se $\forall a \in A$

$$a \top u = u \top a = a$$

3) esistenza degli inversi: $\forall a \in A \ \exists a' \in A$ (*inverso* di $a$) tale che

$$a \top a' = a' \top a = u$$

4) proprietà *commutativa*: $\forall a, b \in A$

$$a \top b = b \top a.$$

La struttura $(A, \top)$ si chiama *monoide* se gode delle proprietà 1 e 2 (es.: $(\mathbb{N}^0, +)$; $(\mathbb{Z}, \cdot)$; con $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \cdot)$, dove $\cdot$ è il prodotto riga per colonna); si dice *gruppo* se valgono 1, 2 e 3.

Un gruppo si dice *abeliano* se gode anche della 4 (es.: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, gli esempi di segmenti e forze applicate in un punto con le rispettive somme).

NOTAZIONE: se l'operazione viene indicata col simbolo "$\cdot$", l'inverso di un elemento $a$ si indica con $a^{-1}$. Se invece l'operazione viene indicata col simbolo "$+$", si usa parlare di *opposto* anziché di inverso; l'opposto di $a$ si scrive $-a$. Una struttura algebrica $(A, \top, \perp)$, dove $\top$ e $\perp$ sono operazioni binarie interne su $A$, PUÒ godere di una o entrambe delle seguenti proprietà *distributive*:

$\forall a, b, c \in A$
$$a \perp (b \top c) = (a \perp b) \top (a \perp c),$$
$\forall a, b, c \in A$
$$(a \top b) \perp c = (a \perp c) \top (b \perp c).$$

Una struttura algebrica $(A, \top, \perp)$, dove $(A, \top)$ sia un gruppo abeliano, $(A, \perp)$ goda della proprietà associativa e che goda di entrambe le proprietà distributive, viene detta *anello*. Tale anello si dice *commutativo* se $(A, \perp)$ gode della proprietà 4, *con unità* se $(A, \perp)$ gode della 2.

Un anello commutativo con unità si chiama *campo* se per $(A - \{ \text{ el. neutro di } \top\}, \perp)$ valgono la 3 e la 4, cioè se $(A - \{\text{el. neutro di } \top\}, \perp)$ è un gruppo abeliano. (Es.: $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$).

Spesso verranno utilizzate *operazioni binarie esterne*, cioè applicazioni $\mathbb{K} \times A \to A$, dove normalmente $\mathbb{K}$ sarà un campo.

## 1.2 Operazioni standard su $\mathbb{K}^n$.

$+ : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (*somma standard*)

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) \overset{def}{=} (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$$

$\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ (*prodotto per scalari standard*)

$$\lambda \cdot (a_1, \dots, a_n) \overset{def}{=} (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$$

$\bullet : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$ (*prodotto scalare naturale*)

$$(a_1, \dots, a_n) \bullet (b_1, \dots, b_n) = \langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle_{nat} \overset{def}{=} a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

ATTENZIONE – Queste sono le definizioni usuali, ma NON le uniche possibili.

Altre strutture formate da: un insieme, una operazione "somma" e una operazione "prodotto per scalari":

$V$ = insieme dei segmenti di un piano, uscenti da un punto $M$; *somma* e *prodotto per scalari* definiti graficamente (regola del parallelogramma e moltiplicazione delle lunghezze).

$W$ = insieme delle forze applicate in un punto M; *somma* e *prodotto per scalari* definiti dinamicamente (composizione delle forze e moltiplicazione dell'intensità.)

$U$ = insieme di tutte le applicazioni da un insieme $X \neq \emptyset$ a $\mathbb{K}$; *somma* e *prodotto per scalari* definiti mediante le operazioni del codominio:

$\forall f, g \in U, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$

$$(f + g)(x) \overset{def}{=} f(x) + g(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) \overset{def}{=} \lambda \cdot f(x).$$

## 1.3 Sistemi lineari (versione “ingenua” operativa).

### 1.3.1 Equazioni lineari.

*Equazione lineare* sul campo $\mathbb{K}$: ogni “espressione” del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

dove $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$. $x_1, \ldots, x_n$ sono dette le *incognite* della equazione, $a_1, \ldots, a_n$ i *coefficienti*, $b$ il *termine noto* (o *costante*). Spesso useremo $x, y, z, t, \ldots$ come incognite.

Ogni $n$-pla $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che valga

$$a_1\overline{x}_1 + \cdots + a_n\overline{x}_n = b$$

(SE ESISTE) è detta una *soluzione* della equazione.

CRITICA - È necessario specificare a priori le incognite della equazione; infatti l’espressione $2x_1 + 5x_2 = -\frac{3}{2}$ ha un significato diverso a seconda che le incognite siano solo $x_1$ e $x_2$ o siano $x_1, x_2, x_3$ o più.

Un modo, ancora “ingenuo” ma un po’ più preciso di pensare ad un’equazione è di vederla come parte di un problema:

quali sono le $n$-ple $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\ ?$$

o anche come parte della definizione di un insieme:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n |\, a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\}.$$

### 1.3.2 Discussione ed eventuale risoluzione di un’equazione lineare.

Data l’equazione in $(x_1, \ldots, x_n)$

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

troviamo le eventuali soluzioni:

Caso 1)
Almeno un coefficiente (per es. $a_1$) è $\neq 0$. Allora poniamo

$$\overline{x}_2 = \alpha_2, \ldots, \overline{x}_n = \alpha_n,$$

con $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ come *parametri* indipendenti, cioè valori in $\mathbb{K}$ assegnati in tutti i modi possibili, indipendentemente gli uni dagli altri. Allora si ha una soluzione ponendo

$$\overline{x}_1 = \frac{b - a_2\alpha_2 - \cdots - a_n\alpha_n}{a_1};$$

dunque l'insieme delle soluzioni è

$$\left\{ \left( \frac{b - a_2\alpha_2 - \cdots - a_n\alpha_n}{a_1}, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \right) | \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

**Esempio.**
L'equazione $2x + y - \sqrt{3}z = 5$ (intesa a coefficienti reali, nelle incognite $x, y, z$) ammette l'insieme di soluzioni

$$\left\{ \left( \frac{5 - \alpha + \sqrt{3}\beta}{2}, \alpha, \beta \right) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lo stesso insieme, benché parametrizzato diversamente, si trova "risolvendo in $y$" come

$$\left\{ \left( \gamma, 5 - 2\gamma + \sqrt{3}\delta, \delta \right) \mid \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

o, risolvendo in $z$,

$$\left\{ \left( \varepsilon, \zeta, \frac{5 - 2\varepsilon - \zeta}{-\sqrt{3}} \right) \mid \varepsilon, \zeta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Caso 2)
I coefficienti sono tutti $= 0$.

> Caso $2'$)
> Se $b \neq 0$ l'equazione non ha soluzioni (l'equazione è *impossibile*).
>
> Caso $2''$)
> Se anche $b = 0$, allora ogni $n$-pla è soluzione (*identità*).

### 1.3.3 Sistemi lineari.

Un *sistema* di $m$ equazioni lineari in $n$ incognite sul campo $\mathbb{K}$ è una $m$-pla di equazioni lineari su $\mathbb{K}$, nelle stesse $n$ incognite.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

*Soluzione* di un sistema è una soluzione comune a tutte le sue equazioni. Un sistema si dice *possibile* (o *consistente*) se ammette soluzioni, *impossibile* (o *inconsistente*) altrimenti. Un sistema possibile si dice *determinato* se ha una sola soluzione, *indeterminato* se ne ha più di una.

Un sistema si dice *omogeneo* se ogni termine noto è nullo.

**Teorema 1.1.** *Ogni sistema lineare omogeneo ammette almeno una soluzione (detta* ovvia*) costituita dalla $n$-pla nulla* $(0, \ldots, 0)$.

*Sistema omogeneo associato* al sistema (1.1) è quello ottenuto da (1.1) ponendo tutti i termini noti uguali a 0:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

**Teorema 1.2.** *L'insieme delle eventuali soluzioni del sistema (1.1) è* $\{u + w \mid w \in W\}$, *dove $u$ è una soluzione particolare qualsiasi di (1.1), e $W$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato.*

### 1.3.4 Discussione ed eventuale risoluzione di un sistema lineare.

**Teorema 1.3.** *a) Se in un sistema lineare alla equazione*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

*si sostituisce (con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$)*

$$\lambda\,(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) = \lambda b_i$$

*l'insieme delle soluzioni non cambia.*

*b) Se in un sistema lineare alle equazioni*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j$$

*si sostituiscono le equazioni*

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n) + (a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n) = b_i + b_j$$

*l'insieme delle soluzioni non cambia.*

*c) Se in un sistema lineare si cambia l'ordine in cui sono scritte le equazioni l'insieme delle soluzioni non cambia.*

*d) Se in un sistema lineare compare l'identità* $0 = 0$*, la sua eliminazione non cambia l'insieme delle soluzioni.*

Il teorema precedente permette di modificare, con il seguente algoritmo, un dato sistema lineare come (1.1) in uno più semplice da trattare, ma con lo stesso insieme di soluzioni (eventualmente vuoto).

### 1.3.5 Algoritmo di eliminazione di Gauss.

*Passo 1.1:*
Sia $j_1$ il più piccolo indice per il quale almeno un coefficiente $a_{ij_1}$ è diverso da 0. Scambiare le equazioni in modo che sia $a_{1j_1} \neq 0$.

*Passo 1.2:*
Per ogni $i > 1$, sostituire la $i$-esima equazione con

$$a_{1j_1} \cdot (i\text{-esima equaz.}) - a_{ij_1} \cdot (1^a \text{ equaz.})$$

Con questi due passi, si è ottenuto un nuovo sistema (1.2) in cui le equazioni, dalla seconda in poi, hanno coefficiente di $x_{j_1}$ (e forse di qualche altra incognita fino ad una incognita $x_{j_2-1}$) nullo.

$$
\begin{cases}
a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
a'_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\dots \\
a'_{mj_2}x_{j_2} + \cdots + a'_{mn}x_n = b'_m \ .
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

*Passo 1.3:*
Se in (1.2) si è venuta a formare l'identità $0 = 0$, la si elimina.
Se in (1.2) si è formata una "equazione" $0 = k$, con $k \neq 0$, s'interrompe l'algoritmo: il sistema (1.2), e insieme il sistema (1.1), è impossibile.

*Passi 2.1, 2.2 e 2.3:*
Come i passi 1.1, 1.2 e 1.3, applicati al "sottosistema" del sistema (1.2) formato dalle equazioni dalla $2^a$ all'ultima.

...

*Passi i.1, i.2 e i.3* ...
...

L'iterazione di questi passi conduce ad un sistema *a gradini*

$$
\begin{cases}
a'_{1j_1}x_{j_1} + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
a''_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\
\dots \\
a''_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + a''_{rn}x_n = b''_r \ .
\end{cases}
\tag{1.3}
$$

*Passo finale:*
Se non si sono trovate uguaglianze impossibili, risolvere l'ultima equazione, introducendo, se necessario, parametri. Poi sostituire i valori trovati nella equazione precedente. Risolvere questa equazione, eventualmente introducendo nuovi parametri. Iterare il procedimento fino alla prima equazione.

**Esempio.**
Discutere, ed eventualmente risolvere il seguente sistema lineare su $\mathbb{R}$, in $x, y, z, t$.

$$\begin{cases} z - 3t = 1 \\ 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6 \ . \end{cases}$$

Scambio $1^a$ e $2^a$ eq.

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6 \ . \end{cases}$$

Sostituisco alla $3^a$ eq.: $3 \cdot (3^a \text{ eq.}) - 2 \cdot (1^a \text{ eq.})$; alla $4^a$ eq.: $3 \cdot (4^a \text{ eq.}) - 5 \cdot (1^a \text{ eq.})$.

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 5z - 13t = -7 \\ 20z - 52t = -28 \ . \end{cases}$$

Sostituisco alla $3^a$ eq.: $(3^a \text{ eq.}) - 5 \cdot (2^a \text{ eq.})$; alla $4^a$ eq.: $(4^a \text{ eq.}) - 20 \cdot (2^a \text{ eq.})$.

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \\ 8t = -48 \ . \end{cases}$$

Sostituisco alla $4^a$ eq.: $2 \cdot (4^a \text{ eq.}) - 8 \cdot (3^a \text{ eq.})$.

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \\ 0 = 0 \ . \end{cases}$$

Elimino l'identità:

$$\begin{cases} 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ z - 3t = 1 \\ 2t = -12 \ . \end{cases}$$

Risolvo e sostituisco iterativamente.

$$\begin{cases} x = \frac{2-6y+z-5t}{3} = \frac{15-6\alpha}{3} = 5-2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 1+3t = -17 \\ t = -6 \ . \end{cases}$$

Insieme delle soluzioni:

$$\{(5-2\alpha, \alpha, -17, -6) \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

**Corollario 1.1.** *Se per un sistema lineare omogeneo di $m$ equazioni in $n$ incognite vale $m < n$, allora esso ammette soluzioni diverse dalla ovvia.*

Si noti che il corollario fornisce una condizione SOLO sufficiente.

# Capitolo 2

# Matrici.

## 2.1 Definizioni iniziali.

*Matrice di tipo* $(m, n)$ (o anche $m \times n$) sull'anello $\mathbb{K}$ è ogni applicazione da $\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}_n$ a $\mathbb{K}$. Normalmente, se non vi saranno indicazioni esplicite in contrario, $\mathbb{K}$ sarà un campo.

L'insieme di tali matrici si denota $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Esempio.**
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ è la matrice costituita dalla applicazione

$$\begin{array}{ccc} (1,1) \mapsto 2 & (1,2) \mapsto 0 & (1,3) \mapsto 2/3 \\ (2,1) \mapsto -1 & (2,2) \mapsto 3 & (2,3) \mapsto 4. \end{array}$$

Ciò si indica anche con il simbolismo:
$A = (a^i_j)_{\substack{i \in \mathbb{N}_2 \\ j \in \mathbb{N}_3}}$, con gli *elementi*

$$\begin{array}{ccc} a^1_1 = 2 & a^1_2 = 0 & a^1_3 = 2/3 \\ a^2_1 = -1 & a^2_2 = 3 & a^2_3 = 4. \end{array}$$

Spesso si scrive semplicemente $(a^i_j)$ per indicare una matrice, quando gli insiemi di indici sono evidenti o non importanti. Talvolta scriveremo anche $(a^{ij})$ o $(a_{ij})$ con lo stesso significato.

Data una matrice $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, per ogni $\bar{i} \in \mathbb{N}_m$ la $n$-pla $(a^{\bar{i}}_1, \ldots, a^{\bar{i}}_n)$ è detta la $\bar{i}$-esima *riga* ed è indicata $\mathbf{a}^{\bar{\mathbf{i}}}$ o $(a^{\bar{i}}_j)_{j\in\mathbb{N}_n}$. Analogamente, per ogni $\bar{j} \in \mathbb{N}_n$ la $m$-pla $\mathbf{a}_{\bar{\mathbf{j}}} = (a^i_{\bar{j}})_{i\in\mathbb{N}_m} = (a^1_{\bar{j}}, \ldots, a^m_{\bar{j}})$ è detta la $\bar{j}$-esima *colonna* di $A$. Con $r = \min\{m, n\}$, la $r$-pla $(a^1_1, \ldots, a^r_r)$ è detta *diagonale principale* di $A$.

Una matrice $(a^i_j)$ si dice:

*triangolare superiore* (o *alta*) se $(i > j) \Rightarrow (a^i_j = 0)$;

*triangolare inferiore* (o *bassa*) se $(i < j) \Rightarrow (a^i_j = 0)$;

*diagonale* se $(i \neq j) \Rightarrow (a^i_j = 0)$.

In ogni $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ c'è la *matrice nulla* $(0)$ i cui elementi sono tutti nulli.

Le matrici con uguale numero di righe e colonne si dicono *quadrate*. Si scrive $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ in luogo di $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Per ogni $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, esiste sempre la *trasposta* di $A$, cioè la matrice $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, definita come $A^t = (b^r_s)$, con $b^r_s = a^s_r$ per ogni $r \in \mathbb{N}_n$ e ogni $s \in \mathbb{N}_m$.

**Proposizione 2.1.** *Per ogni matrice $A$, vale $(A^t)^t = A$.*

## 2.2 Operazioni.

*Somma* di matrici:
$+ : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definita da

$$(a^i_j) + (b^i_j) \overset{def}{=} (a^i_j + b^i_j).$$

*Prodotto per scalari*:
$\cdot : \mathbb{K} \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definito da

$$\lambda \cdot (a^i_j) \overset{def}{=} (\lambda \cdot a^i_j).$$

*Prodotto* (*riga per colonna*):
$\cdot : \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{n\times p} \longrightarrow \mathcal{M}_{m\times p}$ definito da

$$(a^i_j)_{\substack{i\in\mathbb{N}_m\\ j\in\mathbb{N}_n}} \cdot (b^r_s)_{\substack{r\in\mathbb{N}_n\\ s\in\mathbb{N}_p}} \stackrel{def}{=} (\mathbf{a^h} \bullet \mathbf{b_k})_{\substack{h\in\mathbb{N}_m\\ k\in\mathbb{N}_p}};$$

il generico elemento della matrice prodotto è dunque

$$c^h_k = \sum_{r\in\mathbb{N}_n} a^h_r\, b^r_k.$$

La matrice $A$ si dice *conformabile* a $B$ se ne esiste il prodotto, cioè se le righe di $A$ sono lunghe come le colonne di $B$, vale a dire se il numero di colonne di $A$ è uguale al numero di righe di $B$.

**Esempio.**

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (3,5)\bullet(2,-1) & (3,5)\bullet(0,3) & (3,5)\bullet(2/3,4) \\ (4,0)\bullet(2,-1) & (4,0)\bullet(0,3) & (4,0)\bullet(2/3,4) \\ (2,1)\bullet(2,-1) & (2,1)\bullet(0,3) & (2,1)\bullet(2/3,4) \\ (6,1)\bullet(2,-1) & (6,1)\bullet(0,3) & (6,1)\bullet(2/3,4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 15 & 22 \\ 8 & 0 & 8/3 \\ 3 & 3 & 16/3 \\ 11 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

C'è un elemento neutro per il prodotto: è la matrice *identica* (o *identità*) $I_n = (\delta^i_j)_{i,j\in\mathbb{N}_n}$, dove il generico elemento è il *simbolo di Kronecker* definito come

$$\delta^i_j \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

Vale infatti:

**Proposizione 2.2.** *Per ogni* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*,*

$$A \cdot I_n = A, \qquad I_m \cdot A = A.$$

**Proposizione 2.3.** $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$*, dove* $\cdot$ *è il prodotto riga per colonna, è un anello con unità per ogni campo* $\mathbb{K}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, non commutativo per* $n > 1$*.*

## 2.3 Sistemi lineari e matrici.

Tratteremo i sistemi lineari come particolari equazioni matriciali. Il sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdots + a_n^1 x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_1^m x_1 + \cdots + a_n^m x_n = b_m \end{cases}$$

si può scrivere come

$$A \cdot (x) = (b),$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ & \cdots & \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$$

è la matrice dei coefficienti o *incompleta* del sistema,

$$(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ e } (b) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente la $n$-pla delle incognite e la $m$-pla dei termini noti. La matrice incompleta si indica spesso con $M_i$, mentre con $M_c$ si designa la *matrice completa* del sistema

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 & b_1 \\ & \cdots & & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m & b_m \end{pmatrix}.$$

Salvo avviso contrario, confonderemo sempre $\mathbb{K}^r$ con $\mathcal{M}_{r\times 1}(\mathbb{K})$, cioè tratteremo le $r$-ple come matrici colonna, come sopra per $(x)$ e $(b)$.

# Capitolo 3

# Spazi vettoriali.

## 3.1 Definizioni iniziali.

Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un campo, in cui denotiamo con 0 e 1 gli elementi neutri di $+$ e di $\cdot$ rispettivamente. Siano $V \neq \emptyset$ un insieme, $\oplus : V \times V \to V$ un'operazione binaria interna su $V$, e $\odot : \mathbb{K} \times V \to V$ una *operazione binaria esterna su $V$ a coefficienti in $\mathbb{K}$*. La struttura algebrica $(\mathbb{K}, V, \oplus, \odot)$ si chiama *spazio vettoriale su $\mathbb{K}$* se valgono, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall v, v' \in V$,

a) $\lambda \odot (v \oplus v') = (\lambda \odot v) \oplus (\lambda \odot v')$

b) $(\lambda + \mu) \odot v = (\lambda \odot v) \oplus (\mu \odot v)$

c) $(\lambda \cdot \mu) \odot v = \lambda \odot (\mu \odot v)$

d) $1 \odot v = v$

e in tal caso l'operazione esterna è chiamata *prodotto per scalari*, e se inoltre

e) $(V, \oplus)$ è un gruppo abeliano.

Esempi di spazi vettoriali sono le strutture introdotte nella prima lezione. Un nuovo esempio è fornito, per tutti gli $m, n \in N$, da $(\mathbb{K}, \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$, dove $+$ è la somma di matrici e $\cdot$ è il prodotto per scalari già definiti.

NOTAZIONE: l'elemento neutro di $(V, \oplus)$ viene chiamato *vettore nullo*, ed è usualmente indicato con $\overline{O}_V$. $V$ stesso viene chiamato *insieme soggiacente* allo spazio vettoriale, e i suoi elementi sono chiamati *vettori*; gli elementi di $\mathbb{K}$ sono invece detti *scalari*.

È di comune (ab)uso la confusione fra uno spazio vettoriale e il suo insieme soggiacente: spesso, cioè, scriveremo $V$ invece di $(\mathbb{K}, V, \oplus, \odot)$. Infine, quasi sempre si usa lo stesso simbolo per la somma in $\mathbb{K}$ e quella in $V$. Per i prodotti, poi (quello interno di $\mathbb{K}$ e quello esterno) vige non solo la confusione, ma addirittura l'abolizione! Scriveremo $(\lambda\mu)v$ invece della corretta espressione $(\lambda \cdot \mu) \odot v$.

## 3.2 Sottospazi vettoriali.

Sia $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale, e sia $W \subset V$ tale che:

$W$ sia *chiuso rispetto alla somma*:

$$\forall w, w' \in W \text{ sia } w + w' \in W;$$

$W$ sia *chiuso rispetto al prodotto per scalari*:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall w \in W \text{ sia } \lambda w \in W;$$

allora $(\mathbb{K}, W, +', \cdot')$, dove $+'$ e $\cdot'$ sono le restrizioni a $W$ di $+$ e $\cdot$ rispettivamente, è uno spazio vettoriale, che verrà detto *sottospazio vettoriale* i $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$.

NOTAZIONE: le operazioni del sottospazio verranno sempre indicate con lo stesso simbolo dello spazio vettoriale da cui provengono (nel caso di prima, si scriverà $+$ e $\cdot$ anche per $W$).

**Esempi.**
Due sottospazi vettoriali un po' scemi, ma presenti in ogni spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ sono: $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ stesso e il *sottospazio banale* $(\mathbb{K}, \{\overline{O}_V\}, +, \cdot)$. Tutti gli altri sottospazi sono detti sottospazi *propri*.

L'insieme delle funzioni $\mathcal{C}^0$ (cioè continue) da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ forma sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

L'insieme delle funzioni di classe $\mathcal{C}^r$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ forma sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^{r-1}$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

L'insieme delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ forma sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^r$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ per ogni $r$.

L'insieme delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ forma sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni $\mathcal{C}^\infty$ da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

L'insieme delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ di grado $\leq k$ forma sottospazio vettoriale dello spazio di tutte le funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, e di quello delle funzioni polinomiali di grado $\leq k+1$.

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in $n$ incognite su $\mathbb{K}$ (non importa il numero di equazioni) forma sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Nello spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti da un punto $M$, formano sottospazio vettoriale i segmenti uscenti da $M$, e giacenti su una fissata retta $\overline{r}$ (ovviamente passante per $M$).

**Proposizione 3.1.** *Siano $U$ e $W$ sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale $V$. Allora $U \cap W$ è anch'esso sottospazio vettoriale di $V$. Inoltre, se un sottospazio vettoriale $V'$ di $V$ è contenuto in $U$ e in $W$, allora $V'$ è contenuto anche in $U \cap W$.*

ATTENZIONE: un analogo teorema NON vale per l'unione. Per esempio, si considerino i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0\} \quad \text{e} \quad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y = 0\};$$

la loro intersezione è un sottospazio:

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = 0, y = 0\};$$

ma la loro unione NON è sottospazio; infatti $(1,0,0)$ e $(0,1,0)$ appartengono ad $U \cup W$, ma la loro somma $(1,1,0)$ no.

## 3.3 Combinazioni lineari.

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$. Un vettore $v \in V$ si dice *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_m$ se esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m.$$

**Proposizione 3.2.** *Un sottoinsieme $U$ di $V$ costituisce sottospazio vettoriale di $V$ se e solo se è chiuso rispetto alla formazione di combinazioni lineari, cioè:* $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}, \forall u, u' \in U$

$$\lambda u + \lambda' u' \in U.$$

Sia $S$ un sottoinsieme non vuoto qualsiasi di $V$. L'insieme delle combinazioni lineari di vettori di $S$, cioè l'insieme

$$\{v \in V \mid \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K},\ \exists v_1, \ldots, v_m \in S \text{ t.c. } v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m\}$$

si chiama *chiusura lineare* di $S$ e si indica $L(S)$. Conveniamo anche che $L(\emptyset) = \{\overline{O}_V\}$.

**Teorema 3.1.** *$L(S)$ è sottospazio vettoriale di $V$. Inoltre, se un sottospazio vettoriale $U$ di $V$ contiene $S$, allora $U$ contiene anche $L(S)$.*

Si chiama *sistema* (o *insieme*) *di generatori* di $V$ ogni sottoinsieme $S$ di $V$ tale che $L(S) = V$. Si dice anche che $V$ *è generato da $S$*.

**Esempi.**
Ogni spazio vettoriale $V$ ammette $V$ stesso come insieme di generatori.

Lo spazio vettoriale delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ (nella variabile $x$) ammette $S = \{x^i \mid i \in \mathbb{N}^0\}$ come insieme di generatori.

$\mathbb{R}^2$ ammette $S = \{(1,0), (0,1)\}$ come insieme di generatori, ma anche $\{(1,0), (1,1)\}$, $\{(1,1), (2,1), (1,3)\}$ sono ognuno un insieme di generatori per $\mathbb{R}^2$, mentre $\{(1,2), (2,4)\}$ non lo è.

## 3.4 Sottospazio somma.

Dati sottospazi vettoriali $U, W$ di $V$, si chiama *somma* di $U$ e $W$ l'insieme

$$U + W \overset{def}{=} \{u + w \mid u \in U, w \in W\}.$$

**Proposizione 3.3.** *$U + W$ è sottospazio vettoriale di $V$. Inoltre, se un sottospazio vettoriale $V'$ di $V$ contiene $U$ e $W$, allora $V'$ contiene anche $U + W$.*

**Esempio.**
Se $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$, e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}$, allora $U + W$ è il sottospazio $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$.

Lo spazio vettoriale $V$ si dice *somma diretta* di due suoi sottospazi $U, W$ se per ogni $v \in V$ esistono esattamente un $u \in U$ ed esattamente un $w \in W$ tali che sia $v = u + w$.

**Teorema 3.2.** *$V$ è somma diretta di $U$ e $W$ se e solo se 1) $V = U + W$, e 2) $U \cap W = \{\overline{O}_V\}$.*

**Esempio.**
Nell'esempio precedente, $\mathbb{R}^3$ non era somma diretta dei due sottospazi; è invece somma diretta dei sottospazi $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = 0\}$ e $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$.

## 3.5 Spazi riga e colonna di una matrice.

Data una matrice $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, si chiamano *operazioni di riga* su $A$ le seguenti modifiche operate su $A$:

1) scambiare le righe $i$-esima e $j$-esima;

2) moltiplicare una riga per uno scalare $\neq 0$;

3) sommare alla riga $i$-esima la riga $j$-esima moltiplicata per uno scalare.

Date due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $A$ si dice *equivalente per righe* a $B$ se $B$ si ottiene da $A$ mediante una successione finita di operazioni di riga. Questa è effettivamente una relazione di equivalenza.

Chiamiamo *spazio riga* di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dall'insieme delle righe di $A$. Chiamiamo *spazio colonna* di $A$ il sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dall'insieme delle colonne di $A$.

**Teorema 3.3.** *Se $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ sono equivalenti per righe, allora i loro spazi riga coincidono.*

*Dimostrazione.*
Le righe di $B$ sono combinazioni lineari di quelle di $A$ e viceversa.

Una matrice $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ si dice *a gradini* se il numero di elementi nulli iniziali aumenta da ogni riga alla successiva, finché (eventualmente) le righe siano tutte nulle; cioè se esistono in $A$ elementi non nulli

$$a^1_{j_1}, a^2_{j_2}, \ldots, a^r_{j_r} \text{ con } j_1 < j_2 < \ldots < j_r$$

per cui sia

$$a^i_j = 0 \text{ per } i \leq r, j < j_i, \text{ e per } i > r.$$

**Esempio.**
Sono a gradini le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & \pi & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 8 & 5 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorema 3.4.** *Ogni matrice è equivalente per righe a matrici a gradini.*

# Capitolo 4

# Basi.

## 4.1 Dipendenza lineare.

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

I vettori $v_1, \dots, v_m \in V$ si dicono *linearmente dipendenti* se esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \overline{O}_V.$$

Altrimenti i vettori si dicono *linearmente indipendenti*.

**Proposizione 4.1.** *La lineare indipendenza di $v_1, \dots, v_m$ equivale all'implicazione:*

$$(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \overline{O}_V) \Rightarrow (\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_m = 0).$$

**Proposizione 4.2.** *L'unico vettore che da solo è linearmente dipendente è il vettore nullo.*

**Proposizione 4.3.** *Due vettori $v, v' \neq \overline{O}_V$ sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali, cioè se esiste $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ tale che sia $v' = \lambda v$.*

**Esempio.**
I vettori di $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 0, 1)$, $v_3 = (4, 4, -5)$ sono linearmente dipendenti o indipendenti? Cerchiamo scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che valga

$$\lambda_1(1, 2, -3) + \lambda_2(2, 0, 1) + \lambda_3(4, 4, -5) = (0, 0, 0):$$

cioè cerchiamo soluzioni del sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 - 5\lambda_3 = 0 \end{cases} ;$$

esso ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro (ciò che si esprime informalmente come "$\infty^1$" soluzioni): $\{(-2\alpha, -\alpha, \alpha)\}$. Ma allora una qualunque delle soluzioni diverse dalla ovvia, per esempio $(-2, -1, 1)$, rivela la lineare dipendenza:

$$-2v_1 - v_2 + v_3 = (0, 0, 0).$$

Se invece consideriamo $v_1$ e $v_2$ come sopra, ma $v_3' = (4, 4, -3)$, allora la richiesta

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3' = (0, 0, 0)$$

si traduce in un sistema lineare omogeneo che ammette solo la soluzione ovvia; perciò $v_1, v_2, v_3'$ sono linearmente indipendenti.

**Teorema 4.1.** *Dati vettori non nulli $v_1, \ldots, v_m$, essi sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro è combinazione lineare dei precedenti.*

*Dimostrazione.*
Siano $v_1, \ldots, v_m$ linearmente dipendenti; allora esistono scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ non tutti nulli, tali che

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_m v_m = \overline{O}_V.$$

Si consideri lo scalare non nullo di indice massimo: sia $\lambda_i$. Allora

$$v_i = \lambda_i^{-1}(-\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_{i-1} v_{i-1}).$$

Viceversa, sia per ipotesi

$$v_i = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{i-1} v_{i-1};$$

allora vale

$$\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_{i-1} v_{i-1} - 1 v_i + 0 v_{i+1} + \ldots + 0 v_m = \overline{O}_V,$$

che dimostra la lineare dipendenza.

**Corollario 4.1.** *Dati vettori non nulli* $v_1, \ldots, v_m$*, essi sono linearmente dipendenti se e solo se uno di loro è combinazione lineare degli altri.*

**Proposizione 4.4.** *Se* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente dipendenti, allora* $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ *sono linearmente dipendenti, qualunque sia il vettore* $v_{m+1}$*.*

**Proposizione 4.5.** *Se* $v_1, \ldots, v_m$ *sono linearmente indipendenti, allora* $v_1, \ldots, v_{m-1}$ *sono linearmente indipendenti.*

Un sottoinsieme (anche infinito) si dice *linearmente dipendente* se in esso si possono trovare vettori $v_1, \ldots, v_m$ linearmente dipendenti; si dice *linearmente indipendente* altrimenti. L'insieme vuoto è dunque linearmente indipendente.

## 4.2 Basi e dimensione.

Nello spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, si chiama *base* di $V$ ogni suo insieme di generatori linearmente indipendente.

**Teorema 4.2.** *Se* $V$ *ammette una base di* $n$ *vettori, allora ogni altra base di* $V$ *è composta di* $n$ *vettori.*

$V$ si dice di *dimensione (finita)* $n$ se ammette una base formata da $n$ vettori; si scrive $\dim V = n$. Si dice di *dimensione infinita* se non ammette basi finite.

**Teorema 4.3.** *Ogni spazio vettoriale ammette basi.*

**Esempi.**
$\mathbb{K}^n$ ha dimensione $n$: ammette la base *canonica* (o *usuale*, o *naturale*)

$$\mathcal{B}_{nat} = \{(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)\}.$$

$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{K})$ ha dimensione $m \times n$.

Gli spazi di funzioni $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^\infty$, di tutte le applicazioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, di tutte le funzioni polinomiali sono di dimensione infinita. Lo spazio delle funzioni polinomiali (in $x$) di grado $\leq r$ è di dimensione $r + 1$.

**Teorema 4.4.** *Se* $V$ *ha dimensione* $n$*, allora ogni suo insieme linearmente indipendente ha al più* $n$ *vettori; ogni suo insieme con più di* $n$ *vettori è linearmente dipendente.*

**Esempio.**
In $\mathbb{R}^2$ l'insieme precedentemente visto $\{(1,1),(2,1),(1,3)\}$ è senz'altro linearmente dipendente, in quanto formato da 3 vettori in uno spazio di dimensione 2.

ATTENZIONE: NON si può asserire nulla, a priori, sulla lineare dipendenza o indipendenza di un insieme costituito da un numero di vettori minore della dimensione dello spazio.

**Corollario 4.2.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, allora:*

*(i) ogni insieme linearmente indipendente formato da $n$ vettori è una base;*

*(ii) ogni insieme di generatori formato da $n$ elementi è una base.*

**Teorema 4.5.** *Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordinata di $V$. Allora per ogni $v \in V$ esiste esattamente una $n$-pla ordinata di scalari $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tale che sia*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \ .$$

Si dice che $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ è la $n$-pla delle *componenti* (o *coordinate*) di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$.

**Proposizione 4.6.** *Se $V$ è di dimensione $n$, dato un insieme $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ linearmente indipendente, con $m < n$, è sempre possibile trovare un insieme $S'$ di $n - m$ vettori, tale che $S \cup S'$ sia una base di $V$.*

Un tale $S'$ viene detto un *completamento di $S$ ad una base.*

**Teorema 4.6.** *Sia $V$ di dimensione $n$. Ogni suo sottospazio vettoriale $W$ ha dimensione $m \leq n$; in particolare, se $\dim W = n$ allora $W = V$.*

**Teorema 4.7 (di Grassmann).** *Siano $U, W$ sottospazi vettoriali di dimensione finita di uno spazio vettoriale $V$. Allora $U + W$ ha dimensione finita, e*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

## 4.3 Rango di una matrice.

Sia $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ una matrice.

**Teorema 4.8.** *Le dimensioni dello spazio riga e dello spazio colonna di $A$ sono uguali.*

Si dice *rango* (o *caratteristica*) di $A$ la dimensione comune del suo spazio riga e del suo spazio colonna.

**Proposizione 4.7.** *Matrici equivalenti per righe hanno uguale rango.*

**Proposizione 4.8.** *Le righe non nulle di una matrice a gradini sono linearmente indipendenti.*

Si trae dalle proposizioni precedenti un metodo per il calcolo del rango di una matrice: la si riduce con operazioni di riga ad una matrice a gradini, e di questa si contano le righe non nulle.

## 4.4 Sistemi lineari.

**Teorema 4.9 (di Rouché-Capelli).** *Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se i ranghi della matrice completa e incompleta sono uguali.*

*Dimostrazione.*
Il sistema ammette soluzioni se e solo se la colonna dei termini noti è combinazione lineare delle colonne dei coefficienti, dove gli elementi di una soluzione costituiscono gli scalari della combinazione lineare.

**Teorema 4.10.** *Un sistema lineare omogeneo ammette soluzioni diverse dalla ovvia se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è minore del numero delle incognite.*

*Dimostrazione.*
Il sistema ammette soluzioni diverse dalla ovvia se e solo se si può ridurre ad un sistema a gradini (quindi con matrice a gradini equivalente per righe a quella originaria) con meno equazioni che incognite.

# Capitolo 5

# Applicazioni lineari.

## 5.1 Linearità.

Dati spazi vettoriali $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ e $(\mathbb{K}, W, \oplus, \odot)$ sullo stesso campo, un'applicazione $F : V \to W$ è detta *applicazione* (o *trasformazione*) *lineare* se soddisfa le due condizioni:

1) $\forall v, v' \in V,\ F(v + v') = F(v) \oplus F(v')$,

2) $\forall v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $F(\lambda \cdot v) = \lambda \odot F(v)$.

**Proposizione 5.1.** *$F$ è lineare se e solo se $\forall v, v' \in V$, $\forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$,*

$$F(\lambda \cdot v + \lambda' \cdot v') = \lambda \odot F(v) \oplus \lambda' \odot F(v').$$

**Proposizione 5.2.** *Se $F$ è lineare, allora $F(\overline{O}_V) = \overline{O}_W$.*

**Esempi.**

$$\lim_{n\to\infty} : \begin{array}{ccc} \{\text{success. reali conv.}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to\infty} a_n \end{array} ;$$

$$\left.\frac{d}{dx}\right|_{x_0} : \begin{array}{ccc} \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ deriv. in } x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \left.\frac{d}{dx}\right|_{x_0}(f) \end{array} ;$$

$$\begin{array}{rccc} \frac{d}{dx}: & \mathcal{C}^{k+1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^{k}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & f & \longmapsto & \frac{d}{dx}f(x) = f'(x) \end{array};$$

$$\begin{array}{rccc} \int_0^1 dx: & \mathcal{C}^{0}([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^1 f(x)dx \end{array};$$

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x \end{array};$$

Con $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ fissata,

$$\begin{array}{rccc} A\cdot: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{array};$$

Con $V$ spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti da un punto $M$, $W$ sottospazio dei segmenti uscenti da $M$ e giacenti su una fissata retta $\overline{r}$, è lineare la proiezione ortogonale su $\overline{r}$.

Ogni *traslazione* di uno spazio vettoriale $V$, di *ampiezza* $\overline{v} \in V$, cioè l'applicazione $\begin{array}{rccc} \alpha_{\overline{v}}: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & v+\overline{v} \end{array}$, NON è lineare se $\overline{v} \neq \overline{O}_V$.

NON è lineare l' applicazione $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax+b \end{array}$ se $b \neq 0$.

NON è lineare l' applicazione $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & ax^n \end{array}$ se $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

**Teorema 5.1 (fondamentale delle trasformazioni lineari).** *Dati due spazi vettoriali $V$, $W$ su $\mathbb{K}$, data comunque una base $\mathcal{B}$ di $V$, esiste ed è unica l'applicazione lineare che ai vettori di $\mathcal{B}$ fa corrispondere vettori di $W$ comunque assegnati.*

*Dimostrazione.* (caso di $\dim V = n$)
Se $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e ad ogni $v_i$ assegniamo un vettore $w_i \in W$; costruiamo $F$ come segue: per ogni $v \in V$ esiste ed è unica la $n$-pla $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tale che $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$; definiamo $F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$. Si verifica che $F$ è lineare e che ogni altra applicazione lineare che mandi ogni $v_i$ in $w_i$ coincide con $F$.

## 5.2 Isomorfismi.

*Isomorfismo* da $V$ a $W$ è un'applicazione lineare biiettiva. Due spazi vettoriali si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo da uno all'altro.

ATTENZIONE: Sul libro di Lipschutz "isomorfo" ha lo stesso significato, ma "isomorfismo" è definito diversamente.

**Proposizione 5.3.** *Se $F$ è un isomorfismo da $V$ a $W$, l'applicazione inversa $F^{-1}$ è anch'essa un isomorfismo.*

*Endomorfismo* di uno spazio vettoriale $V$ (o *operatore lineare su $V$*) è un'applicazione lineare da $V$ a se stesso. *Automorfismo* è un endomorfismo biiettivo.

**Esempi.**
Un automorfismo di $\mathbb{R}^2$ è l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-y,x) \end{array}.$$

Esempi di automorfismi dello spazio dei segmenti di un piano uscenti da $M$ sono le rotazioni attorno ad $M$.

**Proposizione 5.4.** *Per ogni spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$, è un endomorfismo di $V$ (automorfismo per $\lambda \neq 0$) la dilatazione di ampiezza $\lambda$ definita da* $\begin{array}{rccc} \Theta_\lambda: & V & \to & V \\ & v & \mapsto & \lambda v \end{array}$.

**Teorema 5.2.** *Dato uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$, data una sua base ordinata $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, l'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathcal{B}}: & V & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & v & \longmapsto & (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \end{array}$$

*che ad ogni vettore $v$ associa la sua $n$-pla di componenti rispetto a $\mathcal{B}$ è un isomorfismo.*

**Corollario 5.1.** *Ogni spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$è isomorfo a $\mathbb{K}^n$; tutti gli spazi vettoriali di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ sono fra loro isomorfi.*

NOTAZIONE: se $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ è la $n$-pla delle componenti di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$ scriveremo $v \equiv_{\mathcal{B}} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ o anche $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ o anche $[v]_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Il corollario precedente giustifica la denominazione di *spazio vettoriale standard di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$* che denota $\mathbb{K}^n$. TALI SPAZI SONO GLI AMBIENTI IN CUI SIMULEREMO TUTTI GLI SPAZI VETTORIALI DI DIMENSIONE FINITA. Ciò ha senso in particolare per la parte *c)* della seguente proposizione.

**Proposizione 5.5.** *Siano $V$ e $W$ spazi vettoriali qualunque su $\mathbb{K}$, e sia $F : V \to W$ lineare. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$ vettori distinti. In tal caso:*

*a) se $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ sono linearmente indipendenti, allora anche $v_1, \ldots, v_k$ lo sono;*

*b) se $F$ è iniettiva e $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti, allora anche $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ lo sono;*

*c) se $F$ è un isomorfismo, allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ lo sono.*

## 5.3 Nucleo e immagine.

Data una qualunque applicazione lineare $F : V \to W$, possiamo sempre definire i due insiemi *nucleo* di $F$: $KerF \overset{def}{=} F^{-1}(\{\overline{O}_W\})$ e *immagine* di $F$: $ImF \overset{def}{=} F(V)$, cioè

$$KerF = \{v \in V \mid F(v) = \overline{O}_W\}$$

$$ImF = \{w \in W \mid \exists v \in V \text{ tale che } w = F(v)\}.$$

**Proposizione 5.6.** *$KerF$ è sottospazio vettoriale di $V$, $ImF$ è sottospazio vettoriale di $W$.*

**Teorema 5.3.** *Se $V$ è di dimensione finita, vale la equazione dimensionale della trasformazione lineare $F$:*

$$\dim(KerF) + \dim(ImF) = \dim(V).$$

Un'applicazione lineare si dice *singolare* se il suo nucleo non contiene solo il vettore nullo.

**Proposizione 5.7.** *Un'applicazione lineare è singolare se e solo se non è iniettiva.*

**Teorema 5.4.** *Un operatore lineare su uno spazio di dimensione finita ammette inverso se e solo se non è singolare.*

*Dimostrazione.*
$T : V \to V$ è non singolare $\Leftrightarrow$ $T$ è iniettiva.
Inoltre, $T$ è non singolare $\Leftrightarrow \dim(KerT) = 0 \Leftrightarrow \dim(ImT) = \dim(V) \Leftrightarrow ImT = V \Leftrightarrow T$ è suriettiva.

# Capitolo 6

# Rappresentazioni matriciali di applicazioni lineari.

## 6.1 Applicazioni lineari, basi, matrici.

L'insieme delle applicazioni lineari da uno spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, \oplus, \odot)$ ad uno spazio vettoriale $(\mathbb{K}, W, +, \cdot)$ si denota $Om(V, W)$, oppure $Hom(V, W)$ o anche $L(V, W)$. Su tale insieme definiamo una somma e un prodotto per scalari come segue. Comunque dati $\lambda \in \mathbb{K}$, $F, G \in L(V, W)$ sia, $\forall v \in V$

$$(F + G)(v) \stackrel{def}{=} F(v) + G(v),$$

$$(\lambda \cdot F)(v) \stackrel{def}{=} \lambda \cdot F(v).$$

**Proposizione 6.1.** $(\mathbb{K}, L(V, W), +, \cdot)$ *è uno spazio vettoriale.*

Nel seguito, $\circ$ indicherà la solita composizione di applicazioni.

**Proposizione 6.2.** $(L(V, V), +, \circ)$ *è un anello con unità, in generale non commutativo.*

Siano ora $V, W$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, con $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m)$ basi ordinate di $V$ e $W$ rispettivamente. Data un'applicazione lineare $F : V \to W$, scriviamo (in colonna) le $m$-ple di componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, dei trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$:

$$F(v_1) \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} c_1^1 \\ \vdots \\ c_1^m \end{pmatrix}, \dots, F(v_n) \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} c_n^1 \\ \vdots \\ c_n^m \end{pmatrix}.$$

Sia $C = \left(c^i_j\right) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Teorema 6.1.** *Per ogni* $v \in V$, *se* $v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, *allora*

$$F(v) \equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} F(v) &= F(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = \\ &= x_1F(v_1) + \cdots + x_nF(v_n) \equiv_{\mathcal{B}'} \\ &\equiv_{\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} c^1_1 \\ \vdots \\ c^m_1 \end{pmatrix} x_1 + \cdots + \begin{pmatrix} c^1_n \\ \vdots \\ c^m_n \end{pmatrix} x_n = \\ &= \begin{pmatrix} c^1_1 & \cdots & c^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ c^m_1 & \cdots & c^m_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$C$ è detta *matrice associata a* $F$ *rispetto a* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$, e viene indicata con $[F]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}$.

**Esempi.**
Siano $V, W$ gli spazi vettoriali dei polinomi in $x$, a coefficienti reali, di grado rispettivamente $\leq 3$ e $\leq 2$; siano $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$. La matrice associata alla derivata è quella formata dalle colonne di componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, delle derivate dei polinomi di $\mathcal{B}$:

$$\left[\frac{d}{dx}\right]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

ciò significa che per ottenere la derivata di un polinomio $p$ posso: metterne i coefficienti (componenti rispetto a $\mathcal{B}$) in colonna, moltiplicarli a destra della matrice, ottenendo così le componenti di $\dfrac{dp(x)}{dx}$ rispetto a $\mathcal{B}'$; il polinomio derivato si ottiene moltiplicando tali componenti per i polinomi di $\mathcal{B}'$ e sommando.

Sia $V = W = \mathbb{R}^3$, e sia $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ la base naturale. Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è definita da $F(x, y, z) = (2x - z, 3x, 4y)$, la matrice sarà ottenuta trasformando i vettori della base naturale e scrivendo in colonna le componenti dei trasformati:

$$[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Teorema 6.2.** *Per ogni coppia di basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ fissata, l'applicazione che ad ogni trasformazione lineare $F : V \to W$ associa la matrice $[F]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali da $(\mathbb{K}, L(V, W), +, \cdot)$ a $(\mathbb{K}, \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

Un *omomorfismo* (di monoidi, di gruppi, ecc.) da $(A, \top)$ a $(B, +)$ è un'applicazione $f : A \to B$ tale che, $\forall a, a' \in A$, $f(a \top a') = f(a) + f(a')$.

Un *omomorfismo* (di anelli, di campi, ecc.) da $(A, \top, \perp)$ a $(B, +, \cdot)$ è un'applicazione $f : A \to B$ che sia omomorfismo da $(A, \top)$ a $(B, +)$ e da $(A, \perp)$ a $(B, \cdot)$.

In ogni caso, *isomorfismo* è un omomorfismo biiettivo.

Consideriamo ora il caso di $W = V$, $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. La matrice associata ad un operatore lineare $F$ sarà quadrata; si denoterà con $[F]_{\mathcal{B}}$.

**Teorema 6.3.** *Per ogni base $\mathcal{B}$ fissata, l'applicazione che ad ogni operatore lineare $F : V \to V$ associa la matrice $[F]_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo di anelli da $(L(V, V), +, \circ)$ a $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$.*

## 6.2 Cambiamenti di base.

In uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, di dimensione finita, siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (w_1, \ldots, w_n)$ basi ordinate. Il *cambiamento di base* da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è l'applicazione da $\mathbb{K}^n$ a sè che alla $n$-pla di componenti di ogni $v \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ fa corrispondere la $n$-pla di componenti dello stesso $v$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

**Proposizione 6.3.** *Ogni cambiamento di base è un automorfismo di* $\mathbb{K}^n$.

**Teorema 6.4.** *Il cambiamento di base da* $\mathcal{B}$ *a* $\mathcal{B}'$ *si ottiene moltiplicando la colonna delle componenti di ogni* $v \in V$*, rispetto a* $\mathcal{B}$*, a destra di un'opportuna matrice* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Tale* $P$ *ha come i-esima colonna* ($\forall i \in \mathbb{N}_n$) *la n-pla delle componenti di* $v_i$ *rispetto a* $\mathcal{B}'$.

*Dimostrazione.*
$P$ è associata all'applicazione identità rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

**Proposizione 6.4.** *La matrice di ogni cambiamento di base ammette inversa.*

ATTENZIONE: per costruire la matrice bisogna conoscere le componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$. Se, come spesso succede, conosciamo $\mathcal{B}'$ in funzione di $\mathcal{B}$, basta invertire (quando lo sapremo fare) la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

**Esempio.**
Trovare la matrice dei cambiamenti di base in $\mathbb{R}^2$ da $\mathcal{B}' = ((1,2),(1,3))$ alla base naturale $\mathcal{B} = ((1,0),(0,1))$ e da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è dunque

$$E = P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

ATTENZIONE: alcuni Autori (come Lipschutz) chiamano "matrice di transizione da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ " quella che qui viene designata come "matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ ": nell'esempio precedente, si tratta della matrice $P$.

Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ esse si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che sia $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

**Teorema 6.5.** $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *rappresentano lo stesso operatore lineare su uno spazio vettoriale* $V$ *se e solo se sono simili.*

# Capitolo 7

# Determinanti.

## 7.1 Permutazioni.

*Permutazione* di un insieme è una qualunque applicazione biiettiva dall'insieme a se stesso.

**Proposizione 7.1.** *L'insieme delle permutazioni di un qualunque insieme non vuoto, con l'operazione di composizione, costituisce un gruppo, in generale non abeliano.*

Prevalentemente tratteremo permutazioni dell'insieme $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; l'insieme di tali permutazioni si indica con $S_n$.

Una permutazione $\sigma \in S_n$, cioè un'applicazione biiettiva $\sigma : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_n$, si indica con

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

**Esempio.**
La $\sigma \in S_3$ definita da

$$\begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 1 \\ 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

viene rappresentata come

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Corollario 7.1.** *$(S_n, \circ)$ è un gruppo di $n!$ elementi, non abeliano per $n > 2$.*

Data una permutazione $\sigma \in S_n$, una coppia $(k, i)$ di interi in $\mathbb{N}_n$ si dice *in inversione* per $\sigma$ se

$$k < i \;\text{ e }\; \sigma(i) < \sigma(k).$$

$\sigma$ si dice *pari* (o *di classe pari*) se il numero di coppie in inversione per $\sigma$ è pari, (*di classe*) *dispari* altrimenti. Il *segno* (o *parità*) di $\sigma$ è il numero

$$sgn(\sigma) \overset{def}{=} \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } \sigma \text{ è dispari.} \end{cases}$$

**Proposizione 7.2.** *In ogni $S_n$ valgono:*

*a) la permutazione identica è di classe pari;*

*b) per ogni $\sigma \in S_n$, $\sigma$ e $\sigma^{-1}$ hanno la stessa parità.*

Dati comunque, in $\mathbb{N}_n$, $h \neq k$, chiamiamo *trasposizione* di $h$ e $k$ la permutazione $\alpha_{hk}$ definita da:

$$\alpha_{hk}(i) \overset{def}{=} \begin{cases} k & \text{se } i = h \\ h & \text{se } i = k \\ i & \text{se } i \neq h, k. \end{cases}$$

**Proposizione 7.3.** *$sgn(\alpha_{hk}) = -1$.*

## 7.2 Determinante.

Data $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si chiama *determinante* di $A$ l'elemento di $\mathbb{K}$

$$\det(A) = |A| = \left|a^i_j\right| = \begin{vmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix} \overset{def}{=} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) a^1_{\sigma(1)} \cdot a^2_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a^n_{\sigma(n)}.$$

**Esempi.**

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{vmatrix} = a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1;$$

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{vmatrix} = a_1^1a_2^2a_3^3 + a_2^1a_3^2a_1^3 + a_3^1a_1^2a_2^3 + -a_3^1a_2^2a_1^3 - a_2^1a_1^2a_3^3 - a_1^1a_3^2a_2^3.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -23, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} = 33.$$

## 7.3 Proprietà dei determinanti.

**Proposizione 7.4.** $|A^t| = |A|$.

Questa proposizione consente di "raddoppiare" tutti i teoremi sui determinanti: ogni enunciato valido che coinvolga le righe di una matrice varrà anche per le colonne.

**Teorema 7.1.** *Sia* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

*a) Se* $A$ *ha una riga (colonna) nulla, allora* $|A| = 0$.

*b) Se* $A$ *ha due righe (colonne) uguali, allora* $|A| = 0$.

*c) Se* $A$ *è triangolare, allora*

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} a_i^i.$$

Cosa succede al determinante se applichiamo operazioni elementari di riga (o di colonna) a una matrice? Possiamo utilizzare tali operazioni per semplificare il calcolo del determinante?

**Teorema 7.2.** *Se* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *si ottiene da* $A$

*a) moltiplicando una sola riga (colonna) di* $A$ *per* $\lambda \in \mathbb{K}$, *allora* $|B| = \lambda\,|A|$,

*b) scambiando due righe (colonne) di* $A$, *allora* $|B| = -\,|A|$,

*c) sommando ad una riga (colonna) una combinazione lineare di ALTRE righe (colonne), allora* $|B| = |A|$.

Le parti *c)* dei teoremi precedenti suggeriscono un modo per calcolare il determinante, alternativo all'applicazione della definizione: eventualmente scambiare righe o colonne (tenendo conto dei cambiamenti di segno), poi sommare a righe o colonne combinazioni lineari di altre righe o colonne, in modo da ottenere una matrice triangolare; infine moltiplicare gli elementi della diagonale principale.

**Esempio.**

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & -6 & -23 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 33.$$

**Teorema 7.3 (di Binet).** *Per ogni* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*,*

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|\,.$$

Rispondiamo alla domanda: quand'è che una matrice quadrata ammette inversa?

**Teorema 7.4.** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *ammette inversa*

$$\Updownarrow$$

*le righe (colonne) di* $A$ *sono linearmente indipendenti*

$$\Updownarrow$$

$$|A| \neq 0.$$

## 7.4 Sviluppo di Laplace.

Sia $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Fissati due sottoinsiemi $I \subset \mathbb{N}_m$ e $J \subset \mathbb{N}_n$, si può formare una *sottomatrice* $B$ di $A$ intersecando le righe di $A$ i cui indici stanno in $I$ e le colonne i cui indici stanno in $J$, cioè

$$B = \left(a^{i_h}_{j_k}\right)_{\substack{i_h \in I \\ j_k \in J}}\,.$$

Una sottomatrice quadrata viene spesso chiamata *minore* (ATTENZIONE: molti Autori, per esempio Lipschutz, chiamano "minore" non una sottomatrice quadrata, ma il suo determinante).

Un minore si dice *principale* se $I = J$.

**Esempio.**
Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -9 & \sqrt{6} \\ 5 & -1 & 3 & 4 & 8 \\ -2 & 7 & \pi & -6 & -1 \\ 1/3 & -5 & -8 & 6 & -\pi \end{pmatrix}$$
allora la sottomatrice estratta da $A$ mediante i sottoinsiemi $I = \{2, 4\}$, $J = \{1, 4, 5\}$ è
$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 1/3 & 6 & -\pi \end{pmatrix}.$$
Un minore ($I = \{1, 2\}$, $J = \{1, 3\}$) è $B$, ma non è principale; un minore principale ($I = \{2, 4\} = J$) è $C$:
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Sia ora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il minore corrispondente a $I = \mathbb{N}_n - \{i\}$ e $J = \mathbb{N}_n - \{j\}$ si indica $M^i_j$ e viene chiamato *minore complementare dell'elemento* $a^i_j$. Il *cofattore* (o *complemento algebrico*) dell'elemento $a^i_j$ è:
$$A^i_j \overset{def}{=} (-1)^{i+j} \left|M^i_j\right|.$$
**Esempio.**
Nella matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$
abbiamo:
$$a^2_3 = 7, \qquad M^2_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^2_3 = +6.$$

**Teorema 7.5 (di Laplace).** *Sia* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. per ogni* $\overline{r} \in \mathbb{N}_n$ *vale:*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_j^{\overline{r}} A_j^{\overline{r}}$$

*e anche*

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{\overline{r}}^i A_{\overline{r}}^i.$$

Le espressioni a secondo membro si chiamano *sviluppo di Laplace di* $|A|$, rispettivamente secondo la $\overline{r}$-esima riga, secondo la $\overline{r}$-esima colonna.

**Esempio.**
Il determinante, calcolato prima, di

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix},$$

può essere riottenuto dal teorema di Laplace; con lo sviluppo secondo la $3^a$ colonna:

$$|A| = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + (-9) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 33;$$

con lo sviluppo secondo la $1^a$ riga:

$$|A| = 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 33.$$

Chiaramente, più zeri ci sono in una riga o colonna, più agevole è lo sviluppo; possiamo allora eseguire operazioni di riga che non cambino il determinante per ottenere una riga o colonna con molti zeri.

**Esempio.**
Per la precedente matrice $A$, possiamo considerare una matrice $B$ ottenuta da $A$ sottraendo alla $3^a$ riga la $2^a$ moltiplicata per 2, poi sviluppare secondo la $1^a$ colonna:

$$|A| = |B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 0 & -6 & -23 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -6 & -23 \end{vmatrix} = 33.$$

## 7.5 Matrice inversa.

Indichiamo con $Gl_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici invertibili.

**Proposizione 7.5.** *$(Gl_n(\mathbb{K}), \cdot)$ è un gruppo, non abeliano per $n > 1$.*

**Teorema 7.6.** *Sia $A \in Gl_n(\mathbb{K})$. Allora*

$$A^{-1} = (b^i_j), \quad con \;\; b^i_j = \frac{A^j_i}{|A|}.$$

Quindi un metodo per calcolare l'inversa di $A$ consiste in: formare la matrice dei complementi algebrici, formarne la trasposta, dividerla per $|A|$.

**Esempio.**
Con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -73 & 23 & -6 \\ 51 & -12 & 6 \\ -9 & 6 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -73/33 & 17/11 & -3/11 \\ 23/33 & -4/11 & 2/11 \\ -2/11 & 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}.$$

## 7.6 Determinante di un operatore lineare.

**Proposizione 7.6.** *Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sono simili,allora $|A| = |B|$.*

ATTENZIONE: non vale l'implicazione inversa; è facile trovare matrici NON simili, con uguale determinante.

Il teorema precedente garantisce la buona definizione del *determinante* di un operatore lineare $T$ su uno spazio vettoriale $V$ come il determinante della matrice che rappresenta $T$ rispetto ad una base qualunque.

**Proposizione 7.7.** *a)* $\det(id_V) = 1$*;*

*b) con $T, T'$ operatori lineari su $V$, vale*

$$\det(T \circ T') = \det(T) \cdot \det(T').$$

## 7.7 Rango di una matrice.

Sia $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

**Teorema 7.7.** *$rango(A) = r$ se e solo se*

*1) esiste un minore di $A$ di ordine $r$ con determinante $\neq 0$, e*

*2) ogni minore di $A$ di ordine $> r$ ha determinante $= 0$.*

Data $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, dato un suo minore $M$ ottenuto dagli insiemi di indici $I$ e $J$, chiamiamo *orlato* di $M$ ogni minore di $A$ ottenuto aggiungendo un indice di riga a $I$ e un indice di colonna a $J$.

**Teorema 7.8 (di Kronecker).** *$rango(A) = r$ se e solo se*

*1) esiste un minore $M$ di $A$ di ordine $r$ con determinante $\neq 0$, e*

*2) ogni orlato di $M$ ha determinante $= 0$.*

**Esempio.**
La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

ha minori (ognuno orlato del precedente)

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

con determinanti $\neq 0$, ma ogni orlato di $O_3$ ha determinante nullo. Perciò $rango(A) = 3$.

## 7.8 Sistemi lineari.

**Teorema 7.9 (di Cramer).** *Dato un sistema di $n$ equazioni lineari in $n$ incognite*

$$A \cdot (x) = (b)$$

*con $|A| \neq 0$, esso ammette esattamente una soluzione.*

*Dimostrazione.*
Esiste $A^{-1}$, e allora, moltiplicando a sinistra ambo i membri per $A^{-1}$, si ottiene

$$(x) = A^{-1} \cdot A \cdot (x) = A^{-1} \cdot (b).$$

Dalla dimostrazione otteniamo un metodo per la risoluzione di un sistema *di Cramer* (o *normale*), cioè con matrice incompleta $A \in Gl_n(\mathbb{K})$: moltiplicare per $A^{-1}$ la colonna dei termini noti.

Sia ora dato un sistema possibile di $m$ equazioni in $n$ incognite, con matrice incompleta e completa di rango $r$. Un nuovo metodo per la risoluzione è il seguente.

1) Trovare un minore $M$ della matrice incompleta, di ordine $r$ e determinante $\neq 0$.

2) Eliminare le $m - r$ equazioni i cui coefficienti non compaiono in $M$.

3) Trasformare in altrettanti parametri le $n - r$ incognite i cui coefficienti non compaiono in $M$, e portarle, con i loro coefficienti, nei termini noti.

4) Ora abbiamo un sistema di Cramer, con termini noti dipendenti da $n - r$ parametri, avente $M$ come matrice incompleta. Risolviamolo.

**Esempio.**
Dato il sistema

$$\begin{cases} z - 3t = 1 \\ 3x + 6y - z + 5t = 2 \\ 2x + 4y + z - t = -1 \\ 5x + 10y + 5z - 9t = -6, \end{cases}$$

la matrice incompleta è l'ultima trattata nel precedente paragrafo; la completa è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -1 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & 5 & -9 & -6 \end{pmatrix}$$

e l'ulteriore orlato del minore $O_3$ già considerato ha determinante nullo (perciò il rango della completa è anch'esso 3). Applicando il metodo con $M = O_3$, otteniamo

$$\begin{cases} x = \gamma \\ \\ z - 3t = 1 \\ 6y - z + 5t = 2 - 3\gamma \\ 4y + z - t = -1 - 2\gamma \end{cases}$$

risolvendo il sistema di Cramer:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 3\gamma \\ -1 - 2\gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ -13/2 & -3 & 9/2 \\ -5/2 & -1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 - 3\gamma \\ -1 - 2\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5 - \gamma)/2 \\ -17 \\ -6 \end{pmatrix},$$

che, ricordando $x = \gamma$, fornisce le soluzioni.

# Capitolo 8

# Rappresentazioni di sottospazi.

## 8.1 Rango, nucleo, immagine.

Un sistema lineare possibile si dice *di rango* $r$ se le sue matrici completa e incompleta hanno rango $r$. Si dice *minimo* se il suo rango è uguale al numero delle sue equazioni.

**Teorema 8.1.** *Sia* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *la matrice che rappresenta una trasformazione lineare* $T : V \to W$ *rispetto alle basi* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}'$*, e sia* $r$ *il suo rango. Allora*

*a)* $\dim(ImT) = r$

*b)* $\dim(KerT) = n - r$*.*

*Dimostrazione.*
I trasformati dei vettori di $\mathcal{B}$ formano un insieme di generatori di $ImT$. Attraverso $\Phi_{\mathcal{B}'}$ a tali trasformati corrispondono le colonne di $A$ e ad $ImT$ corrisponde lo spazio colonna di $A$. Questo dimostra a).
b) si deduce dall'equazione dimensionale di $T$:

$$\dim(KerT) = n - \dim(ImT).$$

Con la notazione dell'ultimo teorema, notiamo che un vettore di $V$ appartiene a $KerT$ se e solo se la $n$-pla delle sue componenti rispetto a $\mathcal{B}$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m \text{ zeri.}$$

Diremo che il sistema *rappresenta* $KerT$. Tale sistema è minimo se e solo se il rango di $A$ è $m$. Ogni sistema ottenuto da questo compiendo operazioni di riga sulla matrice dei coefficienti rappresenta lo stesso sottospazio.

Si noti che, se nello studio del rango di $A$ abbiamo individuato un minore $M$ di ordine $r$ con $|M| \neq 0$ e tale che ogni suo orlato abbia determinante $= 0$, ne possiamo ottenere due utili informazioni:

1) le righe di $A$ da cui abbiamo estratto $M$ possono essere utilizzate come $n$-ple di coefficienti di un sistema minimo che rappresenta $KerT$ rispetto a $\mathcal{B}$;

2) le colonne di $A$ da cui abbiamo estratto $M$ possono essere utilizzate come $m$-ple di componenti, rispetto a $\mathcal{B}'$, di vettori di una base di $ImT$.

## 8.2 Rappresentazioni cartesiana e parametrica.

**Teorema 8.2.** *Dato uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, di dimensione $n$, ogni sottospazio vettoriale $U$ può essere rappresentato come nucleo o come immagine di opportune trasformazioni lineari.*

**Corollario 8.1.** *Ogni sottospazio vettoriale $U$ di dimensione $k$ dello spazio vettoriale $V$ (di dimensione $n$) può essere rappresentato, rispetto ad una base di $V$, da un sistema di $n-k$ equazioni lineari omogenee in $n$ incognite, di rango $n-k$.*

Un tale sistema si dice *rappresentazione cartesiana* del sottospazio. *Rappresentazione parametrica* di un sottospazio $U$ è invece quella in cui ogni vettore di $U$ viene rappresentato come combinazione lineare di vettori di una base di $U$. In tal caso $U$ viene visto come immagine di una trasformazione lineare iniettiva.

**Esempi.**
Negli esempi seguenti $V$ è uno spazio vettoriale di dimensione 5 su $\mathbb{R}$. Le componenti $x, y, z, t, u$ sono scritte rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$ di $V$.

Il sistema, di rango 2

$$\begin{cases} x - 2y + z - t - u = 0 \\ 3x - z + 2u = 0 \end{cases}$$

è rappresentazione cartesiana di un sottospazio $U$ di $V$ di dimensione 3. $U$ viene visto come $KerT$, con $T : V \to \mathbb{R}^2$ rappresentata, rispetto a $\mathcal{B}$ e alla base naturale di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Invece, la scrittura

$$\begin{cases} x = \alpha - 2\beta \\ y = 2\alpha + 3\beta \\ z = -\alpha + \beta \\ t = 3\alpha \\ u = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

è una rappresentazione parametrica di un sottospazio $W$ di dimensione 2; infatti ogni vettore si può vedere come combinazione lineare dei vettori $w_1$ e $w_2$ (che risultano linearmente indipendenti, quindi formano una base di $W$) le cui componenti si ottengono ponendo rispettivamente $\alpha = 1$, $\beta = 0$ e $\alpha = 0, \beta = 1$:

$$v = \alpha w_1 + \beta w_2 \equiv_{\mathcal{B}} \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$W$ viene visto come $ImS$, con $S : \mathbb{R}^2 \to V$ rappresentato, rispetto alla base naturale di $\mathbb{R}^2$ e a $\mathcal{B}$, dalla matrice (di rango 2)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Come passare dalla forma cartesiana a quella parametrica? Facile: si risolve il sistema.

**Esempio.**
Per il sottospazio $U$ dato prima, si ottiene

$$\begin{cases} x = \gamma \\ y = 2\gamma + \varepsilon/2 - \delta/2 \\ z = 3\gamma + 2\varepsilon \\ t = \delta \\ u = \varepsilon. \end{cases}$$

Per passare dalla forma parametrica a quella cartesiana si deve prima trovare una base del sottospazio, fissando i parametri come sopra (cioè trovando i trasformati della base naturale), poi applicare il seguente metodo per trovare una rappresentazione cartesiana di una chiusura lineare.

Con $V$ di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B}$ base fissata, siano dati vettori $v_1, \ldots, v_k$ linearmente indipendenti. Siano

$$v_1 \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^n \end{pmatrix}, \ldots, v_k \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix}.$$

La matrice formata da queste colonne ha rango $k$, dato che i vettori sono linearmente indipendenti. In essa si può dunque trovare un minore $M$ di ordine $k$ con $|M| \neq 0$. Si formi ora la matrice

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_k^n & x_n \end{pmatrix};$$

$M$ è un minore anche di questa matrice. Imponiamo a questa matrice di avere anch'essa rango $k$: in questo modo imponiamo alla colonna delle $x$ di essere combinazione lineare delle altre, perciò imponiamo al generico vettore di $V$ (di componenti $(x_1, \ldots, x_n)$) di essere combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$. Per fare ciò, costruiamo gli $n-k$ orlati di $M$ e imponiamo ai loro determinanti di essere 0. Ne vengono le $n-k$ equazioni lineari omogenee di un sistema minimo che rappresenta la chiusura lineare di $\{v_1, \ldots, v_k\}$ rispetto a $\mathcal{B}$.

**Esempio.**
Con $W$ come sopra, abbiamo visto che $W = L(\{w_1, w_2\})$. Nella matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \\ 1 & 2 & u \end{pmatrix}$$

ci sono minori di ordine 2 a determinante $\neq 0$. Scegliamo, per esempio,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};$$

allora il sistema cercato è ottenuto imponendo di esser nulli ai determinanti dei tre orlati di $M$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 2 & 3 & y \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ -1 & 1 & z \\ 3 & 0 & t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 & x \\ 3 & 0 & t \\ 1 & 2 & u \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} -9x - 6y + 7t = 0 \\ -3x - 6z - t = 0 \\ 6x - 4t + 6u = 0. \end{cases}$$

# Capitolo 9

# Equazioni algebriche.

## 9.1 Funzioni polinomiali.

Dato un campo $\mathbb{K}$, *funzione polinomiale da* $\mathbb{K}$ *a* $\mathbb{K}$ *nella variabile* $x$ è una combinazione lineare delle funzioni $x^i$ $(i \in \mathbb{N}^0)$.

*Coefficienti* della funzione sono gli scalari per cui sono moltiplicate le potenze di $x$. *Grado* di una funzione polinomiale $f$ è il massimo esponente di una potenza di $x$ avente coefficiente non nullo, e viene denotato $\deg f$.

Le funzioni costanti non nulle hanno dunque grado 0, mentre non è definito (o è posto convenzionalmente a $-\infty$) il grado della costante nulla:

**Teorema 9.1 (Principio di annullamento delle funzioni polinomiali).** *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo infinito. Una funzione polinomiale su* $\mathbb{K}$ *è la costante nulla (cioè vale 0 per ogni* $x \in \mathbb{K}$*) se e solo se tutti i suoi coefficienti sono nulli.*

**Corollario 9.1 (Principio di identità delle funzioni polinomiali).** *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo infinito. Due funzioni polinomiali su* $\mathbb{K}$ *sono identiche (cioè associano lo stesso valore ad ogni* $x \in \mathbb{K}$*) se e solo se hanno lo stesso grado e coefficienti ordinatamente uguali.*

*Polinomio su* $\mathbb{K}$ *in una indeterminata* è una successione finita di elementi di $\mathbb{K}$.

Ad un polinomio viene associata la funzione polinomiale che ha, ordinatamente, come coefficienti gli elementi della successione.

CONVENZIONE: I polinomi dovrebbero essere ben distinti dalle funzioni polinomiali. Nei casi considerati in questo corso, cioè con campi infiniti, le due teorie si equivalgono, essendo le due strutture trattate isomorfe. Confonderemo le due nozioni, scrivendo indifferentemente "polinomio" o "funzione polinomiale".

L'insieme dei polinomi su $\mathbb{K}$, in $x$, viene indicato $\mathbb{K}[x]$. Un polinomio si dice *monico* se il coefficiente del termine (cioè della potenza di $x$) di grado massimo è 1.

Le operazioni su polinomi sono le stesse definite più in generale su tutte le funzioni da $\mathbb{K}$ a $\mathbb{K}$.

Denotiamo con $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ i polinomi costanti che mandano ogni elemento di $\mathbb{K}$ rispettivamente in 0 e in 1 di $\mathbb{K}$.

**Proposizione 9.1.** *Siano $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ e $q = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$ polinomi non nulli su $\mathbb{K}$. Allora*

*1) $p + q$ ha grado $\leq \max\{m, n\}$, e il suo i-esimo coefficiente è $c_i = a_i + b_i$;*

*2) con $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$, $\lambda \cdot p$ ha grado $m$ e il suo i-esimo coefficiente è $d_i = \lambda \cdot a_i$;*

*3) $p \cdot q$ ha grado $m + n$ e il suo i-esimo coefficiente è*

$$f_i = \sum_{h=0}^{i} a_h b_{i-h}.$$

**Proposizione 9.2.** *Se $p$ è un qualunque polinomio, e $\lambda \in \mathbb{K}$, allora $\mathbf{0}+p = p$, $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \cdot p = \mathbf{0}$, $\mathbf{1} \cdot p = p$.*

**Proposizione 9.3.** *$\mathbb{K}[x]$, con somma e prodotto per scalari, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione infinita.*

**Proposizione 9.4.** *$\mathbb{K}[x]$, con somma e prodotto di polinomi, è un anello commutativo con unità.*

**Teorema 9.2.** *Dati $f, g \in \mathbb{K}[x]$, con $g \neq \mathbf{0}$, esistono $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tali che*

$$f = qg + r,$$

*con o $r = \mathbf{0}$ o $\deg r < \deg g$.*

I polinomi $q$ ed $r$ dell'ultimo teorema si chiamano rispettivamente *quoziente* e *resto* della divisione di $f$ per $g$. Se $r = \mathbf{0}$, diciamo che $g$ *divide* $f$.

**Proposizione 9.5.** *Dati polinomi non nulli $f, g$, esiste ed è unico il polinomio monico $d$ tale che*

*a) $d$ divide $f$ e $g$,*

*b) se un polinomio divide $f$ e $g$, allora divide anche $d$.*

Tale polinomio $d$ si chiama *massimo comun divisore* di $f$ e $g$. Se $d = \mathbf{1}$, allora $f$ e $g$ si dicono *primi fra loro*.

Un polinomio $p$ si dice *irriducibile* se i suoi unici divisori sono le costanti e i polinomi $\lambda p \quad (\lambda \neq 0)$.

**Teorema 9.3 (della fattorizzazione unica).** *Sia $f \in \mathbb{K}[x]$, $\deg f > 0$. Allora esiste ed è unico (a meno dell'ordine) il modo di scrivere*

$$f = \lambda p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

*con $\lambda \in \mathbb{K}$ e $p_1, \dots, p_r$ polinomi irriducibili monici.*

*Equazione algebrica in una incognita, a coefficienti in $\mathbb{K}$, di grado $n$* è ogni espressione del tipo

$$p(x) = 0,$$

dove $p \in \mathbb{K}[x]$ e $\deg p = n$. *Soluzione* dell'equazione è ogni elemento $\overline{x} \in \mathbb{K}$, se esiste, tale che sia

$$p(\overline{x}) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione si chiamano anche *radici* del polinomio $p$.

**Teorema 9.4 (di Ruffini).** *$\alpha \in \mathbb{K}$ è soluzione della equazione algebrica $p(x) = 0$ se e solo se $p$ è divisibile per il polinomio $(x - \alpha)$.*

Un campo $\mathbb{K}$ si dice *algebricamente chiuso* se ogni polinomio $p \in \mathbb{K}[x]$ con $\deg p > 0$ ammette almeno una radice in $\mathbb{K}$.

**Teorema 9.5 (fondamentale dell'algebra).** *$\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.*

$\mathbb{R}$ invece NON è algebricamente chiuso (si pensi al polinomio $x^2 + 1$).

Una soluzione $\alpha$ dell' equazione algebrica $p(x) = 0$ si dice *di molteplicità* $r$ se $p$ è divisibile per $(x - \alpha)^r$ ma non per $(x - \alpha)^{r+1}$.

**Corollario 9.2.** *Sia $p(x) = 0$ un'equazione algebrica di grado $n$, a coefficienti in $\mathbb{C}$. Allora la somma delle molteplicità delle soluzioni è uguale a $n$.*

Consideriamo ora $\mathbb{R}$ come sottoinsieme (anzi sottocampo) di $\mathbb{C}$, e $\mathbb{Q}$ come sottoinsieme (sottocampo) di $\mathbb{R}$.

**Proposizione 9.6.** *Sia $p \in \mathbb{R}[x]$. L'equazione algebrica $p(x) = 0$, considerata a coefficienti complessi, se ammette una soluzione $\alpha = a + ib$, ammette come soluzione anche il complesso coniugato $\overline{\alpha} = a - ib$.*

**Corollario 9.3.** *Ogni $f \in \mathbb{R}[x]$ si scompone in modo unico come*

$$f = \lambda p_1 \cdot \dots \cdot p_r$$

*con $\lambda \in \mathbb{R}$ e $p_1, \dots, p_r$ polinomi irriducibili monici di grado 1 e 2 a coefficienti in $\mathbb{R}$.*

**Corollario 9.4.** *Ogni polinomio a coefficienti reali, di grado dispari, ammette almeno una radice reale.*

Dato $p \in \mathbb{R}[x]$, $p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, con $a_0 \neq 0$, si assegni ad ogni eventuale coefficente nullo un segno + o – in modo arbitrario ma fissato. Ogni coppia di coefficienti consecutivi $(a_i, a_{i+1})$ si chiamerà *permanenza* se i due coefficienti sono dello stesso segno, *variazione* altrimenti.

**Teorema 9.6 (di Harriot-Cartesio).** *Il numero di permanenze [variazioni] di $p$ supera di un numero pari non negativo (eventualmente nullo) la somma delle molteplicità delle radici negative [positive] di $p$.*

**Esempi.**
Dato il polinomio

$$3\sqrt{2} - 3x - \sqrt{2}x^2 + x^3,$$

la sua successione di coefficienti $(3\sqrt{2}, -3, -\sqrt{2}, 1)$ presenta due variazioni e una permanenza; perciò avrà una radice negativa, e zero o due radici positive.

Il polinomio

$$-6 - x^2 + x^4$$

ha la successione di coefficienti (con assegnazione arbitraria del segno ai valori zero) $(-6, +0, -1, +0, 1)$, che presenta 3 variazioni e una permanenza; perciò vi sono una radice negativa, e una o tre positive.

Si noti che, nell'ultimo esempio, una diversa assegnazione dei segni ai valori nulli avrebbe cambiato il conteggio. Per esempio $(-6, -0, -1, +0, 1)$ fornisce 3 permanenze e una variazione, facendoci prevedere una radice positiva e una o tre radici negative. Dal confronto con la deduzione precedente, possiamo ricavare che sicuramente vi sono esattamente una radice positiva e una negativa, mentre le altre due (contate una volta come positive e una come negative) sono "fasulle": le due radici restanti sono complesse coniugate.

**Teorema 9.7.** *Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. Le eventuali radici razionali di $f$ sono della forma $p/q$, dove $p$ è un intero divisore di $a_0$ e $q$ è un intero divisore di $a_n$.*

**Esempio.**
Dato il polinomio

$$15 + 2x - 7x^2 + 8x^4 - 2x^5,$$

SE vi sono radici razionali, esse possono solo essere numeri della seguente lista: $\pm 1$, $\pm 1/2$, $\pm 3$, $\pm 3/2$, $\pm 5$, $\pm 5/2$, $\pm 15$, $\pm 15/2$

Dall'ultima proposizione se ne deduca una sulle eventuali radici razionali di un polinomio a coefficienti razionali.

ATTENZIONE: anche se il teorema fondamentale dell'algebra garantisce l'esistenza di soluzioni, non vi sono metodi costruttivi per determinarle, se non mediante approssimazioni successive. Formule esatte e generali per ottenere le soluzioni di equazioni algebriche di grado $\leq 4$ mediante operazioni di somma, prodotto, estrazione di radici sui coefficienti esistono (teor. di Cardano, Ferrari) ma NON POSSONO ESISTERE per grado $\geq 5$ (teor. di Ruffini, Abel, Galois).

# Capitolo 10

# Autovalori.

## 10.1 Autovalori e autovettori.

Dato un endomorfismo (o operatore lineare) $T : V \to V$ di uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$, uno scalare $\overline{\lambda}$ si dice *autovalore di* $T$ se esiste almeno un $v \in V - \{\overline{O}_V\}$ per cui sia

$$T(v) = \overline{\lambda} \cdot v$$

e in tal caso si chiama *autovettore di* $T$ *relativo a* $\overline{\lambda}$ ogni $v \in V$ (compreso il vettore nullo) per cui valga tale uguaglianza. L'insieme degli autovalori di $T$ viene detto *spettro* di $T$.

**Proposizione 10.1.** *Dato un autovalore* $\overline{\lambda}$ *di un endomorfismo* $T$*, l'insieme*

$$U_{\overline{\lambda}} = \{v \in V \mid T(v) = \overline{\lambda} \cdot v\}$$

*costituisce sottospazio vettoriale di* $V$*.*

L'insieme $U_{\overline{\lambda}}$ viene detto *autospazio di* $T$ *relativo a* $\overline{\lambda}$ (o semplicemente *autospazio di* $\overline{\lambda}$).

**Proposizione 10.2.** *Se* $\overline{\lambda}$ *è un autovalore di* $T$*, si ha* $U_{\overline{\lambda}} = Ker(\overline{\lambda} \cdot id_V - T)$*.*

**Corollario 10.1.** $0$ *è autovalore di* $T$ *se e solo se* $T$ *è singolare, e in tal caso* $U_0 = Ker(T)$*.*

**Esempi.**
Ogni dilatazione $\Theta_{\overline{\lambda}}$ di $V$ ha $\overline{\lambda}$ come unico autovalore e tutto $V$ come autospazio.

L'operatore lineare di $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha autovalori 2 e 5, e i relativi autospazi sono quelli di equazioni $y = 0$ e $x = 0$ rispettivamente.

L'applicazione "derivata", come operatore lineare di $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, ha come autovalori tutti i numeri $\overline{\lambda} \in \mathbb{R}$, e come autospazi $U_{\overline{\lambda}} = L(\{e^{\overline{\lambda}x}\})$.

Con $V$ spazio vettoriale dei segmenti di un piano uscenti dal punto $M$, ogni rotazione di un angolo diverso da quello giro o quello piatto manda ogni segmento non nullo in un segmento che non gli è proporzionale; perciò essa non ha autovalori.

**Proposizione 10.3.** *Autovettori di un endomorfismo relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.*

## 10.2 Polinomio caratteristico.

Sia ora $V$ di dimensione finita $n$, e l'operatore lineare $T : V \to V$ sia rappresentato, rispetto ad una fissata base ordinata $\mathcal{B}$, dalla matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Teorema 10.1.** *$\overline{\lambda} \in \mathbb{K}$ è autovalore di $T$ se e solo se $\left|\overline{\lambda} I_n - A\right| = 0$. In tal caso $U_{\overline{\lambda}}$ è rappresentato, rispetto a $\mathcal{B}$, dal sistema lineare omogeneo $\left(\overline{\lambda} I_n - A\right) \cdot (x) = (0)$.*

*Dimostrazione.* $\exists v \in V - \{\overline{O}_V\}$ tale che $T(v) = \overline{\lambda} v$

$$\Updownarrow$$

$\exists (x) \in \mathbb{K}^n - \{(0)\}$ tale che $A \cdot (x) = \overline{\lambda}(x) = \overline{\lambda} I_n \cdot (x)$

$$\Updownarrow$$

$\exists (x) \in \mathbb{K}^n - \{(0)\}$ tale che $\overline{\lambda} I_n \cdot (x) - A \cdot (x) = (0)$

$$\Updownarrow$$

vi sono soluzioni diverse dalla ovvia per il sistema omogeneo $\left(\overline{\lambda} I_n - A\right) \cdot (x) = (0)$

$$\Updownarrow$$

$$\left|\overline{\lambda}I_n - A\right| = 0.$$

La funzione polinomiale in $\lambda$ su $\mathbb{K}$ data da $|\lambda I_n - A|$, le cui radici sono, per il teorema precedente, gli autovalori di $T$, si chiama *polinomio caratteristico* di $A$, e, grazie alla proposizione seguente, anche di $T$. Gli autovalori di $T$ vengono anche detti autovalori di $A$.

**Proposizione 10.4.** *Se due matrici sono simili, esse hanno uguale polinomio caratteristico.*

**Esempi.**
L'operatore lineare $T$ su $\mathbb{R}^2$ definito da $T\left((x,y)\right) = (-y,x)$ è rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, il cui polinomio caratteristico $\lambda^2 + 1$ non ha radici.

Si noti che l'operatore lineare definito nello stesso modo su $\mathbb{C}$ ha, invece, autovalori $i$ e $-i$.
L'operatore lineare su $\mathbb{R}^2$ rappresentato, rispetto alla base naturale, dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 17/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

ha come polinomio caratteristico

$$\begin{aligned} \left(\lambda - \frac{17}{4}\right)\left(\lambda - \frac{11}{4}\right) - \frac{27}{16} &= \lambda^2 - 7\lambda + 10 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 5). \end{aligned}$$

L'autospazio di 2 è dato dal sistema $(2I_2 - A)\cdot(x) = (0)$, cioè

$$\begin{pmatrix} -9/4 & 3\sqrt{3}/4 \\ 3\sqrt{3}/4 & -3/4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che naturalmente non è minimo, e si riduce all'equazione $y = \sqrt{3}x$. L'autospazio ha dunque come base $\{(1, \sqrt{3})\}$.

Per l'autovalore 5, con calcoli analoghi si arriva all'equazione $x = -\sqrt{3}y$, cioè all'autospazio di base $\{(-\sqrt{3}, 1)\}$.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $(\lambda - 2)(\lambda - 5)$, da cui si ricavano gli autovalori e autospazi già trovati.

## 10.3 Diagonalizzabilità.

Dato un operatore lineare su uno spazio vettoriale $V$ e un suo autovalore $\overline{\lambda}$, la *molteplicità geometrica* dell'autovalore è definita come la dimensione del suo autospazio.

Sia ora $V$ di dimensione finita; la *molteplicità algebrica* di un autovalore $\overline{\lambda}$ dell'operatore lineare $T$ è definita come la molteplicità di $\overline{\lambda}$ in quanto radice del polinomio caratteristico di $T$.

**Teorema 10.2.** *Per ogni autovalore, siano $r$ la sua molteplicità geometrica e $s$ la sua molteplicità algebrica. Vale*

$$1 \leq r \leq s.$$

**Proposizione 10.5.** *Sia $T$ rappresentato dalla matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia $\overline{\lambda}$ un suo autovalore. La molteplicità geometrica di $\overline{\lambda}$ risulta uguale a*

$$n - rango\left(\overline{\lambda} I_n - A\right).$$

**Esempi.**
Le due matrici viste prima hanno due autovalori, ognuno di molteplicità algebrica e geometrica 1. Invece la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (e ogni endomorfismo da essa rappresentato) ha come unico autovalore 0, che ha molteplicità geometrica 1 e algebrica 2.

Una matrice si dice *diagonalizzabile per similitudine* se esiste una matrice diagonale simile ad essa. Un operatore lineare si dice *diagonalizzabile* se esiste una matrice diagonale che lo rappresenti rispetto ad una base.

**Teorema 10.3.** *Un operatore lineare $T$ su uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ risulta diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $V$ formata da autovettori di $T$.*

Una tale base viene detta *spettrale*.

**Corollario 10.2.** *Data $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, essa risulta diagonalizzabile per similitudine (e ogni endomorfismo da essa rappresentato risulta diagonalizzabile) se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a $n$.*

**Proposizione 10.6.** *Se $A$ è diagonalizzabile per similitudine, allora ogni autovalore ha molteplicità algebrica e geometrica uguali.*

ATTENZIONE: la condizione precedente è solo necessaria. Un endomorfismo può infatti avere somma delle molteplicità algebriche degli autovalori inferiore alla dimensione dello spazio; in tal caso, anche se ogni molteplicità geometrica coincidesse con quella algebrica dello stesso autovalore, NON si avrebbe diagonalizzabilità.

**Proposizione 10.7.** *Sia $A$ diagonalizzabile per similitudine. Ogni matrice diagonale sulla cui diagonale principale compaiano gli autovalori di $A$, ripetuti ognuno con la sua molteplicità, è simile ad $A$.*

**Esempio.**
La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 17/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine, in quanto c'è una base spettrale per $\mathbb{R}^2$: $\{(1, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 1)\}$. Le due possibili matrici diagonali ad essa simili (le sue *diagonalizzate per similitudine*) sono $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**Proposizione 10.8.** *Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ammette $n$ autovalori distinti, allora $A$ è diagonalizzabile per similitudine.*

*Dimostrazione.* Infatti le $n$ molteplicità algebriche, e quindi le geometriche, sono costrette ad essere 1, perciò con somma $n$.

ATTENZIONE: quest'ultima è una condizione solo sufficiente. È facile trovare matrici con un numero di autovalori minore di $n$, ma la cui somma delle molteplicità geometriche è uguale ad $n$; tali matrici sono diagonalizzabili per similitudine.

# Capitolo 11

# Forma bilineari e quadratiche.

## 11.1 Matrici particolari.

Una matrice $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *simmetrica* se $A = A^t$, cioè se $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ vale $a^i_j = a^j_i$.

**Esempio.**
È simmetrica la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \pi \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} \\ \pi & \frac{2}{3} & 5 \end{pmatrix}.$$

$A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *emisimmetrica* se $A^t = -A$, cioè se $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$ vale $a^i_j = -a^j_i$.

**Esempio.**
È emisimmetrica la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -\sqrt{2} \\ -3 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 11.1.** *Con $\mathbb{K}$ tale che sia $1+1 \neq 0$, per ogni matrice emisimmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ valgono:*

*a) tutti gli elementi della diagonale principale sono nulli;*

*b) se $n$ è dispari, $|A| = 0$.*

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si dice *ortogonale* se $A^t = A^{-1}$. L'insieme delle matrici ortogonali di ordine $n$ si indica $O_n$ e costituisce, con il prodotto riga per colonna, sottogruppo di $Gl_n(\mathbb{R})$.

**Proposizione 11.2.** *Per ogni $A \in O_n$ vale $|A|^2 = 1$.*

## 11.2 Forme bilineari.

Sia $V$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Si chiama *forma bilineare su $V$* ogni applicazione $f : V \times V \to \mathbb{K}$ tale che per ogni $u, u', v, v' \in V$, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, sia

$$f(\lambda u + \mu u', v) = \lambda f(u, v) + \mu f(u', v)$$

$$f(u, \lambda v + \mu v') = \lambda f(u, v) + \mu f(u, v').$$

Una forma bilineare $f$ su $V$ si dice *simmetrica* se per ogni $u, v \in V$ vale

$$f(u, v) = f(v, u).$$

Una forma bilineare $f$ su $V$ si dice *alternante* se per ogni $v \in V$ vale

$$f(v, v) = 0.$$

Una forma bilineare $f$ su $V$ si dice *emisimmetrica* se per ogni $u, v \in V$ vale

$$f(u, v) = -f(v, u).$$

**Proposizione 11.3.** *Ogni forma bilineare alternante è emisimmetrica.*

**Esempi.**
È una forma bilineare l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f\left((x, y), (x', y')\right) = xx' + 2xy' - yx' + 3yy' .$$

Sono forme bilineari tutti i prodotti di *forme lineari* (o *funzionali lineari*), cioè di applicazioni lineari da $V$ a $\mathbb{K}$.

È una forma bilineare alternante (e quindi emisimmetrica) su $\mathbb{R}^2$ l'applicazione che alla coppia di elementi di $\mathbb{R}^2$ $\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)$ associa $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

È una forma bilineare simmetrica l'applicazione $\bullet$ che ad ogni coppia di elementi di $\mathbb{K}^n$ fa corrispondere il loro prodotto scalare naturale.

È una forma bilineare simmetrica su $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'applicazione che ad ogni coppia di funzioni continue $(f, g)$ fa corrispondere l'integrale $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

È una forma bilineare su $\mathbb{K}^n$ l'applicazione che, data una fissata matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ad ogni coppia di $n$-ple $((x), (y))$ associa l'elemento di $\mathbb{K}$

$$(x)^t \cdot A \cdot (y),$$

cioè

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

## 11.3 Rappresentazione matriciale.

Sia $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineare su uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$. Sia $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una fissata base ordinata di $V$, e sia, per ogni $i, j \in \mathbb{N}_n$, $a^i_j \overset{def}{=} f(v_i, v_j)$. Sia poi $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Teorema 11.1.** *Per ogni $u, v \in V$, se $u \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, allora*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

*Dimostrazione.* Analoga a quella per la rappresentazione matriciale delle applicazioni lineari.

Diciamo che la matrice $A$ *rappresenta* $f$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

**Proposizione 11.4.** *Se la forma bilineare $f$ è simmetrica, la matrice $A$ che la rappresenta rispetto ad una qualunque base è simmetrica. Se $f$ è emisimmetrica, $A$ è emisimmetrica.*

Date matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, esse si dicono *congruenti* se esiste una matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ tale che sia $B = P^t \cdot A \cdot P$.

**Proposizione 11.5.** *Matrici congruenti hanno uguale rango.*

**Teorema 11.2.** *$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ rappresentano la stessa forma bilineare su uno spazio vettoriale $V$ se e solo se sono congruenti.*

Si può allora definire il *rango* di una forma bilineare come il rango di una qualunque matrice che la rappresenti.

**Teorema 11.3 (di diagonalizzabilità per congruenza).** *Con $\mathbb{K}$ in cui sia $1+1 \neq 0$, ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.*

**Corollario 11.1.** *Per ogni forma bilineare simmetrica $f$ su $V$ esiste una base di $V$ rispetto a cui $f$ è rappresentata da una matrice diagonale.*

## 11.4 Matrici simmetriche reali.

Il teorema di diagonalizzabilità per congruenza garantisce che, data una matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, esistono una matrice $P \in Gl_n(\mathbb{K})$ e una matrice diagonale $D$ tali che sia

$$A = P^t \cdot D \cdot P.$$

Sia ora $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matrice reale simmetrica qualunque.

**Teorema 11.4.** *Data una tale $A$, esiste una matrice $P$ come sopra, che è ortogonale; perciò vale anche*

$$A = P^{-1} \cdot D \cdot P,$$

*cioè $A$ è diagonalizzabile per similitudine.*

**Corollario 11.2.** *Per ogni matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di $A$ è uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche ed è uguale ad $n$.*

**Teorema 11.5.** *Tutte le matrici diagonali congruenti ad $A$ hanno lo stesso numero di elementi positivi e lo stesso numero di elementi negativi. Essi sono rispettivamente la somma delle molteplicità (algebriche e geometriche) degli autovalori positivi di $A$, e la somma delle molteplicità degli autovalori negativi.*

La differenza (n. di el. positivi di $D$) – (n. di el. negativi di $D$), dove $D$ è una qualsiasi matrice diagonale congruente ad $A$, viene detta *sigla* della forma bilineare simmetrica rappresentata da $A$.

## 11.5 Forme quadratiche.

Un'applicazione $q : V \to \mathbb{K}$ viene detta *forma quadratica* se esiste una forma bilineare simmetrica $f$ su $V$ (che si dirà *associata* a $q$) tale che per ogni $v \in V$ sia

$$q(v) = f(v, v).$$

**Proposizione 11.6.** *Le forme quadratiche su $\mathbb{K}^n$ sono tutte e sole le funzioni polinomiali in $x_1, \ldots, x_n$ omogenee di grado 2.*

*Rango* e *sigla* della forma quadratica $q$ sono rispettivamente il rango e la sigla della forma bilineare associata $f$.

Sia ora $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Una forma quadratica $q$ si dirà *semidefinita non negativa* se per ogni $v \in V$

$$q(v) \geq 0.$$

Una forma quadratica $q$ si dirà *semidefinita non positiva* se per ogni $v \in V$

$$q(v) \leq 0.$$

$q$ si dice *definita positiva* [*negativa*] se è semidefinita non negativa [non positiva] e

$$q(v) = 0 \Leftrightarrow v = \overline{O}_V.$$

**Proposizione 11.7.** *Una forma quadratica $q$ su $V$ di dimensione $n$*

*a) è semidefinita non negativa se e solo se la sigla di $q$ è uguale al rango di $q$;*

*b) è definita positiva se e solo se la sigla di $q$ è uguale al rango di $q$ ed è uguale ad $n$;*

*c) è semidefinita non positiva se e solo se la sigla di $q$ è uguale all'opposto del rango;*

*d) è definita negativa se e solo se la sigla di $q$ è uguale all'opposto del rango, e il rango di $q$ è uguale ad $n$.*

Sia ora $f$ la forma bilineare simmetrica associata a $q$, e sia $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice che rappresenta $f$ rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$.

**Teorema 11.6.** *Per ogni $v \in V$, se $v \equiv_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, allora*

$$q(v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a^i_i (x_i)^2 + \sum_{i \neq j} a^i_j x_i x_j.$$

Diciamo che $A$ *rappresenta* $q$ rispetto a $\mathcal{B}$. Il polinomio di $2^o$ grado in $x_1, \ldots, x_n$ dell'enunciato è detto *polinomio quadratico* di $q$ rispetto a $\mathcal{B}$.

**Teorema 11.7.** *Data la forma quadratica $q$, la forma bilineare simmetrica ad essa associata risulta essere la $f$ definita, per ogni $u, v \in V$, da*

$$f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right).$$

Il teorema precedente suggerisce il modo di scrivere la matrice che rappresenta una data forma quadratica $q$ rispetto ad una base $\mathcal{B}$: calcolare la forma bilineare $f$ associata, poi valutare $f$ sulle coppie di vettori di $\mathcal{B}$.

## 11.6 Forme canoniche.

**Teorema 11.8.** *Data qualunque matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, essa è congruente ad una matrice diagonale in cui i primi $r$ elementi della diagonale principale sono uguali a 1, e gli altri sono uguali a 0, dove $r$ è il rango di $A$.*

**Corollario 11.3.** *Data una qualunque forma quadratica $q$ su uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita, esiste una base rispetto a cui $q$ è associata al polinomio quadratico*

$$(x_1)^2 + \cdots + (x_r)^2,$$

*dove $r$ è il rango di $q$.*

**Corollario 11.4.** *Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ simmetriche, esse sono congruenti se e solo se hanno uguale rango.*

**Teorema 11.9.** *Data qualunque matrice simmetrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, essa è congruente ad una matrice diagonale in cui i primi $h$ elementi della diagonale principale sono uguali a 1, i successivi $k$ sono uguali a -1, e gli altri sono uguali a 0, dove $h$ e $k$ sono rispettivamente la somma delle molteplicità (algebriche, uguali a quelle geometriche) degli autovalori positivi e di quelli negativi di $A$.*

**Corollario 11.5 (Teorema di Sylvester, Legge d'inerzia).** *Data una qualunque forma quadratica $q$ su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, esiste una base rispetto alla quale $q$ è associata al polinomio quadratico*

$$(x_1)^2 + \cdots + (x_h)^2 - (x_{h+1})^2 - \cdots - (x_{h+k})^2,$$

*dove $h + k$ è il rango e $h - k$ è la sigla di $q$.*

**Corollario 11.6.** *Date $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simmetriche, esse sono congruenti se e solo se hanno uguale rango e uguale sigla.*

Le matrici dei due teoremi precedenti vengono chiamate *forme canoniche per congruenza* delle matrici simmetriche $A$ e delle forme quadratiche associate.

Esistono forme canoniche per similitudine: tale può essere considerata una matrice diagonale (QUANDO ESISTA) simile ad una matrice data (magari dopo una standardizzazione dell'ordine degli autovalori). In certi casi esistono forme canoniche per similitudine (naturalmente non diagonali) anche per matrici non diagonalizzabili per similitudine ("forma di Jordan").

# Capitolo 12

# Spazi vettoriali euclidei.

## 12.1 Prodotti scalari.

Dato uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{R}$, si chiama *prodotto scalare* su $V$ ogni forma bilineare su $V$ che sia simmetrica e la cui forma quadratica associata sia definita positiva. Si usa indicare (una volta che sia stato fissato) il prodotto scalare di due vettori $v, v'$ con $\langle v, v' \rangle$.

**Esempi di prodotto scalare:**
Il prodotto scalare naturale $\bullet$ su $\mathbb{R}^n$.

Su $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, l'integrale $\int_0^1 f(x)g(x)dx$.

Detta *traccia* di una matrice quadrata $A$ la somma $TrA$ degli elementi della diagonale principale, è un prodotto scalare su $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ l'applicazione $\langle A, B \rangle \stackrel{def}{=} Tr\,(B^t \cdot A)$.

Anche applicazioni meno "naturali" come

$$\langle (x,y), (x',y') \rangle \stackrel{def}{=} xx' + 2xy' + 2yx' + 5yy'$$

rientrano nella definizione di prodotto scalare.

*Spazio vettoriale euclideo* (o *spazio di prodotto scalare*) è una struttura $(V, \langle , \rangle)$, dove $\langle , \rangle$ è un prodotto scalare. *Norma* (o meglio: *norma euclidea*) su uno spazio vettoriale euclideo è l'applicazione $\| \ \| : V \to \mathbb{R}$ definita da

$$\|v\| \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle v, v\rangle}$$

(radice non negativa) per ogni $v \in V$. *Distanza* (*euclidea*) su $V$ è l'applicazione $d : V \times V \to \mathbb{R}$ definita da

$$d(u, v) \stackrel{def}{=} \|v - u\|$$

per ogni $u, v \in V$.

**Teorema 12.1 (di Cauchy-Schwarz).** *In uno spazio vettoriale euclideo $V$, per ogni $u, v \in V$, vale*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \, \|v\|.$$

## 12.2 Ortogonalità.

In $V$ spazio vettoriale euclideo si definiscono *ortogonali* i vettori $u, v \in V$ se $\langle u, v\rangle = 0$.

Dato un sottoinsieme $\mathcal{S} \neq \emptyset$ di uno spazio vettoriale euclideo $V$, il *complemento ortogonale* di $\mathcal{S}$ è definito come l'insieme

$$\mathcal{S}^{\perp} \stackrel{def}{=} \{v \in V \mid \forall u \in \mathcal{S},\ \langle u, v\rangle = 0\}$$

che viene detto *complemento ortogonale* di $\mathcal{S}$.

**Proposizione 12.1.** *Per qualunque $\mathcal{S}$ non vuoto, $\mathcal{S}^{\perp}$ costituisce sottospazio vettoriale.*

**Proposizione 12.2.** *Se $V$ è di dimensione finita e $W$ è un sottospazio vettoriale, allora $V$ è somma diretta di $W$ e $W^{\perp}$.*

Quindi, per ogni $v \in V$ esistono esattamente un $w \in W$ e un $w' \in W^{\perp}$ tali che $v = w + w'$. Il vettore $w$ viene detto *proiezione ortogonale* di $v$ su $W$.

In uno spazio vettoriale euclideo, si definisce *coseno dell'angolo* tra vettori $u, v \in V - \{\overline{O}_V\}$ il numero

$$\cos \widehat{uv} \overset{def}{=} \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \, \|v\|}.$$

## 12.3 Insiemi ortonormali.

In uno spazio vettoriale euclideo $V$, un insieme di vettori $\{u_i\}$ si dice *ortogonale* se i suoi vettori sono a due a due ortogonali; si dice *ortonormale* se è ortogonale e tutti i suoi vettori hanno norma 1.

**Esempi.**
Rispetto al prodotto scalare naturale, la base naturale di $\mathbb{R}^n$ è un insieme ortonormale.

Rispetto al prodotto scalare $\int_{-\pi}^{+\pi} dx$, l'insieme $\{1\} \cup \{sen(kx) \,|\, k \in \mathbb{N}\} \cup \{cos(kx) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ è ortogonale.

**Proposizione 12.3.** *Ogni insieme ortogonale che non contiene il vettore nullo è linearmente indipendente.*

**Teorema 12.2.** *Ogni spazio vettoriale euclideo ammette basi ortonormali.*

Per ridurre una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n$ ad una base ortonormale, si impiega il *procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt*:

1) si *normalizza* il vettore $v_1$, cioè lo si divide per la propria norma, ponendo

$$u_1 \overset{def}{=} \frac{v_1}{\|v_1\|};$$

2) costruiti che siano $u_1, \dots, u_i$, definiamo

$$w_{i+1} \overset{def}{=} v_{i+1} - \textstyle\sum_{j=1}^{i} \langle v_{i+1}, u_j\rangle u_j$$

e normalizziamo:

$$u_{i+1} \overset{def}{=} \frac{w_{i+1}}{\|w_{i+1}\|};$$

in questo modo, giunti ad $u_n$, abbiamo ottenuto un insieme ortonormale di $n$ vettori, che necessariamente è una base.

**Esempio.**
Data in $\mathbb{R}^3$, rispetto al prodotto scalare naturale, la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$, con

$$v_1 = (1, 2, 0),\ v_2 = (-1, 1, 1),\ v_3 = (2, 0, 3),$$

eseguiamo l'ortonormalizzazione:

$$\begin{aligned}
u_1 = &\ \frac{v_1}{\|v_1\|} = \tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}};\\
w_2 = &\ v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 = (-1, 1, 1) - \tfrac{1}{\sqrt{5}}\tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} = \tfrac{(-6,3,5)}{5},\\
u_2 = &\ \frac{w_2}{\|w_2\|} = \tfrac{\frac{1}{5}(-6,3,5)}{\sqrt{\frac{36+9+25}{25}}} = \tfrac{(-6,3,5)}{\sqrt{70}};\\
w_3 = &\ v_3 - \langle v_3, u_1\rangle u_1 - \langle v_3, u_2\rangle u_2 = (2, 0, 3) - \tfrac{2}{\sqrt{5}}\tfrac{(1,2,0)}{\sqrt{5}} - \tfrac{3}{\sqrt{70}}\tfrac{(-6,3,5)}{\sqrt{70}} =\\
= &\ \tfrac{(130,-65,195)}{70} = \tfrac{(26,-13,39)}{14},\\
u_3 = &\ \frac{w_3}{\|w_3\|} = \tfrac{\frac{1}{14}(26,-13,39)}{\sqrt{\frac{676+169+1521}{196}}} = \tfrac{(26,-13,39)}{\sqrt{2366}}.
\end{aligned}$$

Le basi ortonormali sono particolarmente interessanti per le due seguenti proprietà.

**Proposizione 12.4.** *Sia $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ortonormale di $(V, \langle,\rangle)$. Per ogni $v \in V$, le componenti di $v$ rispetto a $\mathcal{B}$ sono $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, dove, per ogni $i \in \mathbb{N}_n$,*

$$\lambda_i = \langle v, u_i\rangle.$$

**Proposizione 12.5.** *Sia $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ortonormale di $(V, \langle,\rangle)$. Se $v \equiv_{\mathcal{B}} (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e $v' \equiv_{\mathcal{B}} (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, allora*

$$\langle v, v'\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i.$$

## 12.4 Operatori ortogonali.

Sia $V$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $n$, e sia $F$ un operatore lineare su $V$. $F$ viene detto *ortogonale* se, per ogni $v, v' \in V$,

vale
$$\langle F(v), F(v')\rangle = \langle v, v'\rangle.$$

**Proposizione 12.6.** *Se $F$ è un operatore lineare ortogonale, allora*

*a) per ogni $v \in V$ vale $\|F(v)\| = \|v\|$;*

*b) per ogni $v, v' \in V$ vale $d\left(F(v), F(v')\right) = d(v, v')$.*

**Teorema 12.3.** *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice che rappresenta l'operatore lineare $F$ su $V$ rispetto ad una base ortonormale. $F$ è ortogonale se e solo se $A$ è ortogonale.*

**Proposizione 12.7.** *La matrice del cambiamento di base fra due basi ortonormali è ortogonale.*

## 12.5 Ortogonalità fra sottospazi.

**Proposizione 12.8.** *Sia $U$ un sottospazio vettoriale $h$-dimensionale di uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle,\rangle)$ di dimensione $n$. Rispetto ad una fissata base ortonormale $\mathcal{B}$, sia*

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-h} & \cdots & a_n^{n-h} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

*un sistema minimo che rappresenta $U$. Allora i vettori*

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv_{\mathcal{B}} (a_1^1, \ldots, a_n^1) \\ &\vdots \\ w_{n-h} &\equiv_{\mathcal{B}} (a_1^{n-h}, \ldots, a_n^{n-h}) \end{aligned}$$

*formano una base di $U^\perp$.*

ATTENZIONE: la base dell'enunciato precedente non è, in generale, ortogonale.

**Proposizione 12.9.** *Con $V$ e $U$ come sopra, $(U^\perp)^\perp = U$.*

**Corollario 12.1.** *Con $V, U, \mathcal{B}$ come sopra, se*

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv (b_1^1, \ldots, b_n^1) \\ &\vdots \\ u_h &\equiv (b_1^h, \ldots, b_n^h) \end{aligned}$$

*costituiscono una base di $U$, allora*

$$\begin{pmatrix} b_1^1 & \cdots & b_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ b_1^h & \cdots & b_n^h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

*è un sistema minimo che rappresenta $U^\perp$.*

In uno spazio vettoriale euclideo $(V, \langle , \rangle)$ siano dati due sottospazi $U, W$. Essi si dicono *ortogonali* se

1) $U \not\subset W$ e $W \not\subset U$, e

2) il complemento ortogonale di $U$ in $U + W$ è contenuto in $W$ (o, equivalentemente, viceversa).

# Capitolo 13

# Spazi affini ed euclidei.

## 13.1 Spazi e trasformazioni affini.

Negli esempi di carattere geometrico già si era manifestata l'opportunità di svincolarsi dalla scelta di un punto privilegiato: l'ambiente in cui è possibile operare così è la geometria affine. Questa geometria richiederebbe una trattazione più accurata, ma noi ne daremo una operativa ridotta, più consona agli obiettivi di questo corso.

Otteniamo il nostro scopo ampliando gli insiemi di trasformazioni ammesse tra spazi vettoriali.

Una *trasformazione affine* $\alpha$ da uno spazio vettoriale $V$ ad uno $W$ è definita come la composizione $\tau \circ F : V \to W$, dove $F : V \to W$ è una trasformazione lineare e $\tau : W \to W$ è una traslazione.

Una trasformazione affine è detta *isomorfismo affine* quando $F$ è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Per distinguere meglio il nuovo contesto, gli spazi vettoriali verranno chiamati *spazi affini* quando fra loro considereremo trasformazioni affini e non solo lineari. Se $V$ è lo spazio vettoriale, quando lo consideriamo spazio affine, lo denotiamo $\mathcal{A}(V)$.
La dimensione di uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ è quella dello spazio vettoriale $V$ ad esso associato.

Gli elementi degli spazi affini verranno chiamati *punti* invece che vettori, e saranno denotati con lettere maiuscole.

Così come le basi sono state utilizzate per fissare un isomorfismo tra uno spazio vettoriale di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$ e lo spazio vettoriale canonico $\mathbb{K}^n$, in modo analogo ci interessa fissare un isomorfismo affine tra $\mathcal{A}(V)$ e lo spazio affine $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$.

Un *riferimento affine* di $\mathcal{A}(V)$ è una coppia $\mathcal{S} = (M, \mathcal{B})$ dove $M \in \mathcal{A}(V)$ è un punto detto *origine* e $\mathcal{B}$ è una base di $V$.
Dato un punto $P \in \mathcal{A}(V)$ le sue *coordinate affini* rispetto al riferimento affine $\mathcal{S}$ sono le componenti del vettore $P - M$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

**Teorema 13.1.** *Ogni trasformazione affine $\alpha : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(W)$, $\alpha = \tau \circ F$, dove $dim(V) = n$ e $dim(W) = m$, si rappresenta rispetto ai riferimenti $\mathcal{S} = (M, \mathcal{B})$ e $\mathcal{S}' = (M', \mathcal{B}')$, con un'equazione matriciale*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

*dove $A$ rappresenta $F$ rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, e $(b_i)$ è la colonna delle coordinate affini di $\alpha(M)$ rispetto a $\mathcal{S}'$.*

## 13.2 Sottospazi affini.

Consideriamo fissato uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$ su $\mathbb{K}$. Un insieme di punti $\mathcal{D}$ viene detto *sottospazio affine di dimensione* $k$ di $\mathcal{A}(V)$ se i suoi punti si possono scrivere come somma di un punto più gli elementi di un sottospazio vettoriale di dimensione $k$ di $V$, cioè se esistono $P \in \mathcal{A}(V)$ e un sottospazio $U$ di dimensione $k$ di $V$ per cui sia

$$\mathcal{D} = \{P' \in \mathcal{A}(V) \,|\, \exists u \in U \text{ tale che } P' = P + u\},$$

o, più semplicemente,

$$\mathcal{D} = \{P + u \,|\, u \in U\}.$$

In tale situazione, il sottospazio $U$ viene detto *giacitura* del sottospazio affine $\mathcal{D}$, e i suoi elementi *vettori liberi* di $\mathcal{D}$. Ovviamente $P \in \mathcal{D}$ perché $P = P + 0_V$.

Si noti che la differenza $P'' - P'$ di due punti di un sottospazio affine $\mathcal{D}$ è sempre un vettore libero di $\mathcal{D}$.

Chiameremo *retta, piano, iperpiano* ogni sottospazio affine di dimensione rispettivamente 1, 2, $n-1$, dove $n$ è la dimensione di $V$.

**Proposizione 13.1.** *Ogni sottospazio vettoriale di $V$ è anche sottospazio affine, ed ha se stesso come giacitura.*

## 13.3 Rappresentazioni di sottospazi affini.

**Proposizione 13.2.** *Data una trasformazione lineare $F : V \to W$, per ogni $w \in ImF$ la controimmagine $F^{-1}(\{w\})$ è un sottospazio affine di $\mathcal{A}(V)$.*

**Corollario 13.1.** *Per ogni sistema lineare possibile su $\mathbb{K}$, in $n$ incognite, di rango $r$, l'insieme delle soluzioni è un sottospazio affine di $\mathcal{A}(\mathbb{K}^n)$, di dimensione $n-r$.*

**Proposizione 13.3.** *Dato un qualunque sottospazio affine $\mathcal{D}$ di $\mathcal{A}(V)$, esistono uno spazio vettoriale $W$, un vettore $w \in W$ e un'applicazione lineare $F : V \to W$ per cui $\mathcal{D} = F^{-1}(\{w\})$.*

**Corollario 13.2.** *Ogni sottospazio affine di dimensione $h$ di uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ di dimensione $n$ si può rappresentare, rispetto ad un dato riferimento, mediante un sistema lineare possibile di $n-h$ equazioni.*

La rappresentazione indicata viene detta *rappresentazione cartesiana* del sottospazio affine. Ci occupiamo ora di come trovarla, dati punti e vettori liberi di un sottospazio.

**Teorema 13.2.** *Dati i punti $P_0, \ldots, P_k$, essi appartengono ad uno stesso sottospazio affine $h$-dimensionale (con $0 \leq h \leq n$) se e solo se i vettori liberi $P_1 - P_0$, ..., $P_k - P_0$ appartengono ad uno stesso sottospazio vettoriale $h$-dimensionale.*

**Corollario 13.3.** *Dati $k$ vettori liberi linearmente indipendenti ed un punto, esiste ed è unico il sottospazio affine $k$-dimensionale contenente il punto ed avente i vettori dati come vettori liberi.*

**Corollario 13.4.** *Rispetto ad una fissata base $\mathcal{B}$, siano dati i vettori liberi linearmente indipendenti*

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv (a_1^1, \ldots, a_1^n) \\ &\vdots \\ v_k &\equiv (a_k^1, \ldots, a_k^n) \end{aligned}$$

*e il punto*

$$P_0 \equiv (b_0^1, \ldots, b_0^n).$$

*Allora i punti del sottospazio $k$-dimensionale $\mathcal{D}$ contenente $p_0$ e avente $v_1, \ldots, v_k$ come vettori liberi sono tutti e soli i punti*

$$P \equiv (x_1, \ldots, x_n)$$

*tali che la matrice*

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 & (x_1 - b_0^1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \cdots & a_k^n & (x_n - b_0^n) \end{pmatrix}$$

*abbia rango $k$.*

I corollari 13.4 e 13.3 consentono rispettivamente di calcolare la rappresentazione cartesiana di un sottospazio, e la sua *rappresentazione parametrica* proveniente da una rappresentazione parametrica della giacitura. In questa, un sottospazio affine viene visto come immagine di uno spazio vettoriale di parametri attraverso una trasformazione affine iniettiva.

**Esempio.**
In uno spazio vettoriale di dimensione 3, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, il piano passante per $P_0 \equiv (1, 5, -3)$ e avente vettori liberi $v_1 \equiv (3, 2, -7)$ e $v_2 \equiv (8, 0, 3)$ è caratterizzato dalle equazioni che si ottengono imponendo rango 2 alla matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 & (x-1) \\ 2 & 0 & (y-5) \\ -7 & 3 & (z+3) \end{pmatrix}$$

da cui, passando per

$$6(x-1) - 65(y-5) - 16(z+3) = 0,$$

si ottiene la forma cartesiana

$$6x - 65y - 16z + 271 = 0;$$

in alternativa, la forma parametrica è

$$\begin{cases} x = 1 + 3\alpha + 8\beta \\ y = 5 + 2\alpha \\ z = -3 - 7\alpha + 3\beta. \end{cases}$$

Dato un sottospazio affine $\mathcal{D}$ di dimensione $n-2$ di $V$, si chiama *fascio* di iperpiani per $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti gli iperpiani passanti per $\mathcal{D}$.

Dato un punto $P_0$, si chiama *stella* di iperpiani per $P_0$ l'insieme di tutti gli iperpiani passanti per $P_0$.

**Proposizione 13.4.** *a) Se il sottospazio affine $(n-2)$-dimensionale $\mathcal{D}$ è rappresentato da un sistema di due equazioni lineari, il generico iperpiano del fascio per $\mathcal{D}$ è rappresentato da un'equazione che è combinazione lineare di tali due equazioni.*

*b) Se un punto $P_0$ è rappresentato con un sistema di $n$ equazioni lineari, il generico iperpiano della stella per $P_0$ è rappresentato da un'equazione che è combinazione lineare di tali $n$ equazioni.*

**Esempio.**
Data in uno spazio 3-dimensionale la retta $r$ di equazioni

$$\begin{cases} -5x + y + 5 = 0 \\ 6y + 5z - 45 = 0, \end{cases}$$

si trovi il piano passante per $r$ e per il punto $Q \equiv (5, 3, 11)$.

Un comodo metodo consiste nel formare il fascio di piani per $r$, e imporre al suo generico elemento il passaggio per $Q$. Fascio per $r$:

$$\lambda(-5x + y + 5) + \mu(6y + 5z - 45) = 0;$$

passaggio per $Q$:

$$\lambda(-25 + 3 + 5) + \mu(18 + 55 - 45) = 0$$

da cui

$$-17\lambda + 28\mu = 0;$$

una scelta possibile è dunque $(\lambda, \mu) = (28, 17)$, perciò il piano cercato ha equazione

$$-140x + 130y + 85z - 625 = 0.$$

Dato un vettore libero non nullo $v$ di una retta $r$, la $n$-pla di componenti di $v$ rispetto ad una base fissata si dice $n$-pla di *coefficienti direttivi* (o *numeri direttori*) di $r$ rispetto alla base.

**Proposizione 13.5.** *Dati, rispetto ad una base $\mathcal{B}$, due punti*

$$\begin{array}{l} P_0 \equiv (b_0^1, \dots, b_0^n), \\ P_1 \equiv (b_1^1, \dots, b_1^n), \end{array}$$

*il vettore libero $P_1 - P_0$ ha componenti*

$$(b_1^1 - b_0^1, \dots, b_1^n - b_0^n).$$

La retta passante per due punti ha dunque coefficienti direttivi uguali (o proporzionali) alle differenze delle coordinate dei due punti.

Si noti che, per una retta $r$, la $n$-pla delle differenze delle coordinate del generico punto meno quelle di un punto fissato $P_0 \equiv (b_0^1, \dots, b_0^n)$ è proporzionale ad ogni $n$-pla di coefficienti direttivi $(l_1, \dots, l_n)$. Oltre alla rappresentazione cartesiana di $r$ con un sistema di $n-1$ equazioni (cioè come intersezione di $n-1$ iperpiani), e la rappresentazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = b_0^1 + l_1 t \\ \vdots \\ x_n = b_0^n + l_n t \end{cases}$$

si ha anche una speciale forma di rappresentazione cartesiana, la *forma frazionaria*, possibile solo se tutti i coefficienti direttivi sono $\neq 0$:

$$\frac{x_1 - b_0^1}{l_1} = \cdots = \frac{x_n - b_0^n}{l_n}.$$

**Esempi.**
In un piano, la retta passante per $P_0 \equiv (1, 2)$ e $P_1 \equiv (3, -5)$ si può rappresentare, ponendo uguale a 1 il rango della matrice

$$\begin{pmatrix} (3-1) & (x-1) \\ (-5-2) & (y-2) \end{pmatrix},$$

in forma cartesiana

$$7x + 2y - 11 = 0,$$

in forma parametrica

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 7t \end{cases},$$

in forma frazionaria

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7}.$$

In uno spazio 3-dimensionale, la retta per $P_0 \equiv (1, 0, 9)$ e $P_1 \equiv (2, 5, 3)$ avrà le rappresentazioni

$$\begin{cases} -5x + y + 5 = 0 \\ 6y + 5z - 45 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5t \\ z = 9 - 6t \end{cases},$$

$$x - 1 = \frac{y}{5} = \frac{z-9}{-6}.$$

## 13.4 Parallelismo.

**Proposizione 13.6.** *Se, rispetto ad un riferimento $\mathcal{S}$, un sottospazio affine $\mathcal{D}$ è rappresentato dal sistema lineare $A \cdot (x) = (b)$, allora la sua giacitura è rappresentata dal sistema lineare omogeneo associato $A \cdot (x) = (0)$.*

In uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$, un sottospazio affine $\mathcal{D}_1$ di dimensione $h$ si dice *parallelo* ad un sottospazio affine $\mathcal{D}_2$ di dimensione $k$, con $h \leq k$, se la giacitura di $\mathcal{D}_1$ è contenuta nella giacitura di $\mathcal{D}_2$.

**Proposizione 13.7.** *Siano dati un iperpiano* $\Pi$*, rappresentato dall'equazione*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

*e una retta* $r$ *di coefficienti direttivi* $l_1, \ldots, l_n$*. Allora* $r$ *è parallela a* $\Pi$ *se e solo se*

$$a_1l_1 + \cdots + a_nl_n = 0.$$

*Dimostrazione.*
$r$ è parallela a $\Pi$ se e solo se un suo qualunque vettore libero non nullo appartiene alla giacitura di $\Pi$; questa ha equazione $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, da cui la tesi.

**Proposizione 13.8.** *Date due rette* $r$*, di coefficienti direttivi* $l_1, \ldots, l_n$*, ed* $r'$*, di coefficienti direttivi* $l'_1, \ldots, l'_n$*; allora* $r$ *è parallela ad* $r'$ *se e solo se i coefficienti direttivi sono proporzionali.*

*Dimostrazione.*
$r$ è parallela ad $r'$ se e solo se un suo qualunque vettore libero è anche vettore libero di $r'$.

**Proposizione 13.9.** *Dati due iperpiani* $\Pi$ *e* $\Pi'$ *di equazioni rispettivamente*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b';$$

*allora* $\Pi$ *è parallelo a* $\Pi'$ *se e solo se* $(a_1, \ldots, a_n)$ *è proporzionale a* $(a'_1, \ldots, a'_n)$*.*

*Dimostrazione.*
Sono paralleli se e solo se hanno la stessa giacitura.

**Esempi.**
In un piano siano dati la retta $r$ di equazione $x - 5y = 3$ e il punto $P \equiv (4, 2)$. Trovare la retta $s$ passante per $P$ e parallela ad $r$.

Le rette $r$ ed $s$ possono essere viste come iperpiani del piano; la generica retta passante per $P$ ha equazione

$$a(x - 4) + b(y - 2) = 0;$$

la condizione di parallelismo con $r$ richiede che $(a, b)$ sia proporzionale a $(1, -5)$. Perciò una risposta valida è

$$x - 5y + 6 = 0.$$

## 13.5 Ortogonalità.

Uno *spazio euclideo* è uno spazio affine $\mathcal{A}(V)$ tale che $V$ è uno spazio vettoriale euclideo. Nel seguito, considereremo uno spazio vettoriale euclideo di dimensione $n$ fissato $(V, \langle , \rangle)$.

D'ora in poi per non appesantire la notazione, denoteremo con $V$ sia lo spazio vettoriale che quello affine ad esso associato.

Una trasformazione affine $\alpha = \tau \circ F$ da $V$ a se stesso è chiamata *uguaglianza* (o *isometria*) se $F$ è una trasformazione ortogonale.

In $V$, un sottospazio affine $\mathcal{D}_1$ si dice *ortogonale* ad un sottospazio affine $\mathcal{D}_2$ se la giacitura di $\mathcal{D}_1$ è ortogonale alla giacitura di $\mathcal{D}_2$.

$\mathcal{D}_1$ è detto *h-perpendicolare* a $\mathcal{D}_2$ se $\mathcal{D}_1$ è ortogonale a $\mathcal{D}_2$ e $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ è un sottospazio di dimensione $h$. *Perpendicolare* significa $h$-perpendicolare per qualche $h \geq 0$.

Sia ora fissata una base ORTONORMALE $\mathcal{B}$. (In questo caso un riferimento affine viene detto *riferimento cartesiano ortogonale*).

**Proposizione 13.10.** *Siano dati un iperpiano* $\Pi$*, rappresentato dall'equazione*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

*e una retta* $r$ *di coefficienti direttivi* $l_1, \ldots, l_n$*. Allora* $r$ *è ortogonale a* $\Pi$ *se e solo se* $(l_1, \ldots, l_n)$ *è proporzionale a* $(a_1, \ldots, a_n)$*.*

*Dimostrazione.*
La giacitura di $\Pi$ ha equazione $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, perciò il vettore libero $v$ di componenti $(a_1, \ldots, a_n)$ genera il suo complemento ortogonale. La giacitura di $r$ è ortogonale a quella di $\Pi$ se e solo se coincide con il suo complemento ortogonale, perciò se e solo se un suo vettore è proporzionale a $v$.

**Proposizione 13.11.** *Date due rette* $r$*, di coefficienti direttivi* $l_1, \ldots, l_n$*, ed* $r'$*, di coefficienti direttivi* $l'_1, \ldots, l'_n$*. Allora* $r$ *è ortogonale ad* $r'$ *se e solo se*

$$l_1l'_1 + \cdots + l_nl'_n = 0.$$

*Dimostrazione.*
$r$ è ortogonale ad $r'$ se e solo se un suo qualunque vettore libero è ortogonale ad un qualunque vettore libero di $r'$.

**Proposizione 13.12.** *Dati due iperpiani* $\Pi$ *e* $\Pi'$ *di equazioni rispettivamente*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b, \qquad\qquad a_1'x_1 + \cdots + a_n'x_n = b';$$

$\Pi$ *è ortogonale a* $\Pi'$ *se e solo se*

$$a_1a_1' + \cdots + a_na_n' = 0.$$

**Esempio.**
Dati, in uno spazio 3-dimensionale reale, una retta $r$ di equazioni

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

e il piano $\Pi$ di equazione

$$6x - 3y + 7z = 0,$$

si trovi il piano $\Pi'$ passante per $r$ e ortogonale a $\Pi$.

Costruiamo il fascio di piani passanti per $r$:

$$\lambda(x - 2y + 5z - 1) + \mu(x - y - z - 2) = 0;$$

cioè

$$(\lambda + \mu)x + (-2\lambda - \mu)y + (5\lambda - \mu)z + (-\lambda - 2\mu) = 0;$$

imponendo l'ortogonalità con $\Pi$ otteniamo la condizione

$$6(\lambda + \mu) - 3(-2\lambda - \mu) + 7(5\lambda - \mu) = 0$$

cioè

$$47\lambda + 2\mu = 0$$

da cui un'equazione per $\Pi'$:

$$45x - 43y - 57z - 92 = 0.$$

# Capitolo 14

# Iperquadriche.

## 14.1 Definizioni generali.

L'ambiente più corretto per lo sviluppo della teoria delle iperquadriche è lo spazio affine. Come già fatto in precedenza, ridurremo tale studio all'ambito vettoriale. D'ora in poi (per necessità tecniche che risulteranno più chiare in seguito) sarà fissato uno spazio vettoriale $V$ su $\mathbb{K}$ di dimensione $n+1$ di cui lo spazio affine $\mathcal{A}$ in questione sarà considerato sottospazio affine $n$-dimensionale; $\mathcal{B}$ sarà una base ordinata fissata di $V$, che verrà sempre sottintesa. Il sottospazio affine $\mathcal{A}$ che costituirà l'ambiente della teoria sarà quello di equazione $x_{n+1} = 1$. Per alleggerire la notazione, spesso indicheremo le coordinate di un punto di $\mathcal{A}$ con la $n$-pla $(x_1, \dots, x_n)$, invece che con la $n+1$-pla $(x_1, \dots, x_n, 1)$.

Una *iperquadrica* $\mathcal{Q}$ di $\mathcal{A}$ è l'insieme di punti $P \equiv (x_1, \dots, x_n)$ tali che $q\left((x_1, \dots, x_n, 1)\right) = 0$, dove $q$ è la forma quadratica su $\mathbb{K}^{n+1}$, associata ad una forma bilineare simmetrica $f$ su $\mathbb{K}^{n+1}$, e rappresentata dalla matrice simmetrica $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ detta *discriminante* dell'iperquadrica.

*Equazione* dell'iperquadrica è l'espressione

$$q\left((x_1, \dots, x_n, 1)\right) = 0,$$

cioè

$$(x_1 \cdots x_n 1) \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{n+1}^1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n+1} & \cdots & a_{n+1}^{n+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Si chiamano *coniche* e *quadriche* rispettivamente le iperquadriche di un piano e di uno spazio 3-dimensionale.

**Esempi.**
La conica $\overline{\Gamma}$ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

ha equazione (in coordinate $x, y$)

$$x^2 + 2y^2 + 6xy - 2y - 5 = 0.$$

La quadrica $\Theta$ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

ha equazione (in coordinate $x, y, z$)

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 6z - 9 = 0.$$

## 14.2 Classificazione affine.

Un'iperquadrica si dice *degenere* se il suo discriminante ha determinante nullo. Altrimenti si dice *non degenere*.

Un'iperquadrica può anche essere vuota, se il campo $\mathbb{K}$ di definizione non è algebricamente chiuso.

**Teorema 14.1.** *Sul campo $\mathbb{R}$, un'iperquadrica non degenere è vuota se e solo se $A$ rappresenta una forma quadratica definita positiva o definita negativa.*

Due iperquadriche non vuote si dicono *affinemente equivalenti* se esiste una trasformazione affine che trasforma una nell'altra.

**Teorema 14.2.** *Con $\mathbb{R}$ come campo, siano $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}'$ due iperquadriche di discriminanti $A, A'$ rispettivamente. Allora $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{Q}'$ sono affinemente equivalenti se e solo se $A$ è congruente a $\pm A'$ e il minore $M_{n+1}^{n+1}$ è congruente a $\pm M'^{n+1}_{n+1}$.*

## 14.3 Coniche reali nel piano affine e euclideo.

In tutto questo paragrafo $\Gamma$ sarà una fissata conica di un piano affine su $\mathbb{R}$, di discriminante $A$.

**Proposizione 14.1.** *Sia $\Gamma$ non degenere; essa è vuota se e solo se $A_3^3 > 0$ e $a_1^1 \cdot |A| > 0$.*

**Esempio.**
Per la conica $\overline{\Gamma}$ dell'esempio precedente, $A_3^3 = -7$, perciò la conica non è vuota.

**Teorema 14.3.** *Ogni conica non degenere e non vuota è affinemente equivalente a una delle coniche di equazione:*

*1)* $x^2 + y^2 = 1$,

*2)* $y = x^2$,

*3)* $x^2 - y^2 = 1$.

Una conica si dice rispettivamente *ellisse, parabola, iperbole* se è affinemente equivalente alla conica di equazione 1, 2 o 3.

**Teorema 14.4.** *Sia $\Gamma$ non degenere (cioè $|A| \neq 0$), essa è*

*una ellisse non vuota se $A_3^3 > 0$ e $a_1^1 \cdot |A| \leq 0$,*

*una parabola se $A_3^3 = 0$,*

*un'iperbole se* $A_3^3 < 0$.

OSSERVAZIONE: la conica non degenere con $A_3^3 > 0$ e $a_1^1 \cdot |A| > 0$ è detta *ellisse immaginaria*, in quanto, come già detto, non contiene punti reali.

**Esempio.**
La solita $\overline{\Gamma}$ è dunque un'iperbole.

**Proposizione 14.2.** *Nessuna conica non degenere contiene rette.*

ATTENZIONE - Iperquadriche anche non degeneri in dimensione superiore possono invece contenere rette.

D'ora in poi $\Gamma$ sarà una conica non degenere e non vuota.

**Proposizione 14.3.** *Ogni retta interseca* $\Gamma$ *in uno, due o nessun punto.*

Le intersezioni retta-conica si ottengono in corrispondenza delle soluzioni della risolvente del sistema delle loro equazioni. Se la risolvente ha una sola soluzione di molteplicità due, la retta si dice *tangente*; se non ha soluzioni, la retta si dice *esterna*; altrimenti si dice *secante*.

**Proposizione 14.4.** *Sia* $P \in \Gamma$*,* $P \equiv (p_1, p_2)$*, e sia* $A$ *il discriminante di* $\Gamma$*; allora la retta tangente a* $\Gamma$ *in* $P$ *ha equazione cartesiana*

$$(p_1 \; p_2 \; 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

**Esempio.**
Sia $\overline{\Gamma}$ la conica di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Il punto $P \equiv (\sqrt{5}, 0)$ appartiene a $\Gamma$. La tangente in $P$ a $\Gamma$ ha dunque equazione

$$(\sqrt{5} \; 0 \; 1) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioè $\sqrt{5}x + (3\sqrt{5} - 1)y - 5 = 0$.

D'ora in poi lo spazio ambiente sarà un piano EUCLIDEO, e la base scelta sarà ortonormale.

Sia $\Gamma$ una conica non degenere.
Si chiama *asse* di $\Gamma$ ogni retta $r$ di simmetria ortogonale per la conica, cioè tale che ogni retta secante, ortogonale ad $r$, interseca $r$ nel punto medio dei due punti di intersezione della secante con $\Gamma$.
Si chiama *centro* un punto $C$ di simmetria centrale per la conica, cioè tale che $C$ è il punto medio fra i due punti d'intersezione con $\Gamma$ di ogni retta secante contenente $C$. Se tale punto esiste, allora è unico.

Ellisse e iperbole sono coniche a centro. La parabola no.

**Proposizione 14.5.** *Sia $\Gamma$ una conica a centro di discriminante $A = (a^i_j)$. Allora il centro è il punto $C$ di coordinate:*

$$\left(\frac{A^3_1}{A^3_3}, \frac{A^3_2}{A^3_3}\right)$$

**Proposizione 14.6.** *Sia $\Gamma$ una conica non degenere di discriminante $A$. Ogni asse di $\Gamma$ ha equazione*

$$(l\ m\ 0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

*dove $(l, m)$ è un autovettore non nullo relativo ad un autovalore non nullo del minore $M^3_3$ di $A$.*

**Esempio.**
Consideriamo nuovamente la conica $\overline{\Gamma}$ di discriminante

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix},$$

per $\overline{\Gamma}$ abbiamo autovalori $\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$, da cui si ricava $(l, m, 0) = (6, 1 \pm \sqrt{37}, 0)$, e quindi i due assi di $\overline{\Gamma}$ sono le rette di equazione

$$(9 \pm 3\sqrt{37})x + (20 \pm 2\sqrt{37})y + 1 \pm \sqrt{37} = 0\,.$$

Si chiama *circonferenza* una conica non degenere non vuota, i cui punti siano tutti ad uguale distanza, detta *raggio*, dal centro.

**Proposizione 14.7.** *Ogni circonferenza ha equazione del tipo*

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0;$$

*il centro ha coordinate* $(-a/2, -b/2)$ *e il raggio vale* $\sqrt{(a^2+b^2)/4 - c}$*.*

*Dimostrazione.*
Sviluppando l'equazione

$$(x - x_{centro})^2 + (y - y_{centro})^2 = (raggio)^2.$$

**Esempio.**
La circonferenza di raggio 3 e centro (0,4) ha equazione

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0\,.$$

# Capitolo 15

# Curve e superfici parametrizzate.

## 15.1 Curve parametrizzate.

In questo paragrafo cercheremo di formalizzare il concetto di curva nello spazio tridimensionale, che intuitivamente tutti abbiamo come "scia lasciata da un punto mobile", e di generalizzarlo al caso $n$-dimensionale reale.

Curve e superfici hammo come ambiente uno spazio affine o euclideo. Per semplificare la notazione, ma senza vera perdita di generalità, supporremo che tale spazio sia $\mathbb{R}^n$
Consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni ad una variabile $t$, continue da un intervallo reale $I$ (non necessariamente chiuso e/o limitato) ad $\mathbb{R}$, che denoteremo con $C^0(I, \mathbb{R})$.

Siano $x_1, \dots, x_n \in C^0(I, \mathbb{R})$.
Una *curva parametrizzata* $\mathcal{C}$ su $I$ in $\mathbb{R}^n$ è la funzione

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \mapsto & (x_1(t), \dots, x_n(t)). \end{array}$$

L'intervallo $I$ è detto *intervallo di parametrizzazione* della curva. Si dice anche che l'$n$-pla $P(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ dà una parametrizzazione di $\mathcal{C}$.

**Esempi.**
La retta scritta in forma parametrica è una curva parametrizzata in cui l'intervallo $I$ è tutto l'asse reale.

La circonferenza $\overline{\mathcal{C}}$ di raggio $r$ e centro $(\alpha, \beta)$ ha per parametrizzazione

$$t \longrightarrow (\alpha + r\cos t, \beta + r\sin t) \qquad\qquad t \in [0, 2\pi].$$

Si dice *supporto* di $\mathcal{C}$ l'insieme

$$supp\, \mathcal{C} = \{(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n |\, t \in I\}.$$

ATTENZIONE – Anche se una curva e il suo supporto vengono spesso confusi, sono due cose diverse!

**Esempio.**
La curva $\tilde{\mathcal{C}}$ che ha per parametrizzazione

$$t \longrightarrow (\alpha + r\cos t, \beta + r\sin t) \qquad\qquad t \in [0, 4\pi].$$

e $\overline{\mathcal{C}}$ hanno come supporto la stessa circonferenza, ma sono evidentemente diverse, avendo un diverso intervallo di parametrizzazione. Geometricamente $\overline{\mathcal{C}}$ percorre la circonferenza una volta, $\tilde{\mathcal{C}}$ percorre la circonferenza 2 volte.

Una curva si dice *piana* se esiste un piano $\pi$ che contiene il suo supporto, altrimenti si dice *gobba*.

OSSERVAZIONE – In pratica verificare che una curva $\mathcal{C} = (x(t), y(t), z(t))$ in $\mathbb{R}^3$ è piana significa trovare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, tali che $\forall t \in I$ risulta

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0.$$

**Esempi.**
Verifichiamo che la curva

$$\mathcal{E} = (5\cos t, \sqrt{3}\sin t, 0), \qquad\qquad t \in [0, 2\pi].$$

è piana.
Per l'osservazione precedente si deve avere:

$$5a\cos t + \sqrt{3}b\sin t + d = 0$$

per ogni $t$; tale identità si ottiene ponendo $a = b = d = 0$, quindi $\mathcal{E}$ è una curva piana ed è contenuta nel piano di equazione $z = 0$ .

Consideriamo la curva

$$\mathcal{C} = (3\cos^2 t, t, 3\sin^2 t), \qquad t \in [0, 5],$$

essa giace sul piano di equazione

$$x + z - 3 = 0.$$

Consideriamo la curva

$$G = (2t^2 - t, t^3 - t^2, 5t + 1), \qquad t \in \mathbb{R}$$

e verifichiamo che è una curva gobba. Per l'osservazione di pagina 95, se $G$ fosse piana dovrebbero esistere $a, b, c, d$ non tutti nulli per cui

$$a(2t^2 - t) + b(t^3 - t^2) + c(5t + 1) + d = 0$$

cioè

$$bt^3 + (2a - b)t^2 + (-a + 5c)t + c + d = 0$$

e quindi per il principio di identità dei polinomi si ha:

$$\begin{cases} b = 0 \\ 2a - b = 0 \\ -a + 5c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}.$$

Consideriamo la curva di equazioni parametriche:

$$\mathcal{M} : (\cos t, \sin t, 3t), \qquad\qquad t \in \mathbb{R}$$

questa è un'elica circolare (la classica molla!) di passo costante 3, ed è una curva gobba. Per verificarlo basta valutare l'equazione:

$$a \cos t + b \sin t + 3ct + d = 0$$

ad esempio in $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ e verificare che si ottiene il sistema omogeneo

$$\begin{cases} a + d = 0 \\ b + 3/2\pi c + d = 0 \\ -a - 3c\pi + d = 0 \\ -b + 9/2\pi c + d = 0 \\ a + 6\pi c + d = 0 \end{cases},$$

che ammette la sola soluzione nulla che, ovviamente, non è accettabile.

OSSERVAZIONE – Nel caso dei sottospazi affini, abbiamo visto che esistono sia una rappresentazione parametrica che una cartesiana. Anche per le curve (o meglio per i loro supporti), in molti casi, esiste una rappresentazione cartesiana. Un metodo per ricavarla è l'eliminazione del parametro.
Nell'esempio di pagina 95, $\mathcal{E}$ non era altro che l'ellisse di equazioni:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x^2/25 + y^2/3 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$

Sia $t_0 \in I$, e sia $\mathcal{C}$ la curva parametrizzata da $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ su $I$. $\mathcal{C}$ si dice *regolare* in $t_0$ se le funzioni $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ sono derivabili in $t_0$ e risulta

$$(x_1'(t_0), \ldots, x_n'(t_0)) \neq (0, \ldots, 0),$$

altrimenti il punto si dice *singolare*.
Più in generale diremo che una curva è *regolare* se lo è in ogni punto del suo intervallo di parametrizzazione, ed è *singolare* altrimenti.

Si dice *retta tangente* a $\mathcal{C}$ nel suo punto $P_0 = P(t_0)$ la "retta limite", se esiste, di quella che contiene la corda $\overline{P_0P}$ al tendere di $P$ verso $P_0$ lungo $\mathcal{C}$.

**Proposizione 15.1.** *Sia* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ *una curva parametrizzata da* $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *e regolare in* $t_0$. $\mathcal{C}$ *ammette retta tangente in* $P_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *e questa ha equazione cartesiana*

$$\frac{x_1 - x_1^0}{x_1'(t_0)} = \frac{x_2 - x_2^0}{x_2'(t_0)} = \cdots = \frac{x_n - x_n^0}{x_n'(t_0)};$$

*e la corrispondente equazione parametrica è*

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + x_1'(t_0)s \\ x_2 = x_2^0 + x_2'(t_0)s \\ \vdots \\ x_n = x_n^0 + x_n'(t_0)s. \end{cases}$$

OSSERVAZIONE – In $\mathbb{R}^2$ consideriamo la funzione continua $y = f(x)$, con $x \in I$. Questa definisce una curva $\mathcal{C}$ con la parametrizzazione standard:

$$t \longmapsto (t, f(t)) \qquad\qquad t \in I.$$

$\mathcal{C}$ risulta regolare in ogni punto in cui esiste $f'(t)$. Sia $t_0$ un tale punto e sia $P_0 = (t_0, f(t_0))$. Allora la retta tangente in $P_0$ a $\mathcal{C}$ ha equazione:

$$\frac{x - t_0}{1} = \frac{y - f(t_0)}{f'(t_0)}$$

e dunque $y - f(t_0) = f'(t_0)(x - t_0)$, come è noto dall'Analisi.

**Esempio.**
Calcoliamo la tangente all'elica $\mathcal{M}$ dell'esempio precedente nel punto che si ottiene per $t = \pi$, cioè $P = (-1, 0, 3\pi)$.
Il vettore delle derivate $(-\sin t, \cos t, 3)$ calcolato nel punto $\pi$ risulta $(0, -1, 3)$, e quindi la retta tangente, in forma parametrica, è:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -s \\ z = 3\pi + 3s. \end{cases}$$

## 15.2 Superfici parametrizzate.

Siano $I$ e $I'$ due intervalli reali (non necessariamente chiusi e/o limitati). Consideriamo una funzione continua $f$ definita su due variabili:

$$\begin{array}{rccl} f: & I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (s,t) & \mapsto & f(s,t). \end{array}$$

Si può dimostrare che l'insieme delle funzioni di questo tipo è uno spazio vettoriale, che indicheremo con $C(I \times I', \mathbb{R})$.

Siano $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C(I \times I', \mathbb{R})$.
Una *superficie parametrizzata* $\mathcal{S}$ su $I \times I'$ in $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$) è la funzione

$$\begin{array}{ccl} I \times I' & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (s,t) & \mapsto & (x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t)). \end{array}$$

Si dice che l'$n$-pla $P(s,t) = (x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t))$ dà una parametrizzazione della superficie $\mathcal{S}$.

Si dice *supporto* di $\mathcal{S}$ l'insieme

$$supp\,\mathcal{S} = \{(x_1(s,t), x_2(s,t), \ldots, x_n(s,t)) \in \mathbb{R}^n | (s,t) \in I \times I'\}.$$

**Esempi.**
Vediamo ora la costruzione di 3 particolari tipi di superficie: il cono, il cilindro e la sfera.
Consideriamo una curva parametrizzata $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \end{array}$$

e un punto $V \equiv (a,b,c)$ non appartenente a $\mathcal{D}$.
Il *cono* di *vertice* $V$ e *direttrice* $\mathcal{D}$ è il luogo delle rette, dette *generatrici*, che passano per $V$, e intersecano $\mathcal{D}$ in un punto.
Calcoliamo le sue equazioni parametriche. Per farlo è sufficiente scrivere la generica retta passante per un punto della direttrice e per il vertice. Sia quindi $P \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ un generico punto appartenente a $\mathcal{D}$, la retta per $P$ e $V$ ha equazioni parametriche

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (x_1(t) - a)s + a \\ y = (x_2(t) - b)s + b \\ z = (x_3(t) - c)s + c \end{array} \right. ;$$

le stesse equazioni, al variare di $t \in I$ e di $s \in \mathbb{R}$, danno una parametrizzazione del cono. Chiaramente per ogni fissato valore del parametro $t$ ottengo una generatrice del cono.
Per esempio il cono $\mathcal{C}$ di vertice $V \equiv (0,0,-1)$ e con direttrice la circonferenza parametrizzata da

$$t \longmapsto (3\cos t, 3\sin t, 0) \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]$$

ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 3s\cos t \\ y = 3s\sin t \\ z = s - 1 \end{cases} \qquad\qquad (t,s) \in [0,2\pi] \times \mathbb{R}.$$

Sia $\mathcal{D}$, come sopra, una generica curva parametrizzata in $\mathbb{R}^3$ e sia $v = (l, m, n)$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ diverso da zero. Il *cilindro* di *direttrice* $\mathcal{D}$ e *vettore libero* $v$ è il luogo delle rette, dette *generatrici*, passanti per un punto di $\mathcal{D}$ e con vettore libero $v$. Analogamente a quanto fatto per il cono, per ottenere equazioni parametriche per il cilindro, consideriamo un punto $P \equiv (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ appartenente a $\mathcal{D}$. Allora la retta passante per $P$ e con vettore libero $v$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = ls + x_1(t) \\ y = ms + x_2(t) \\ z = ns + x_3(t) \end{cases} .$$

Come prima, le stesse equazioni, al variare di $t \in I$ e di $s \in \mathbb{R}$, danno una parametrizzazione del cilindro. Di nuovo per ogni fissato valore del parametro $t$ ottengo una generatrice del cilindro.

Infine, siano fissati $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ e $r$ un numero reale positivo.
La superficie $\mathcal{S}'$

$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\varphi, \psi) & \mapsto & (\alpha + r\cos\varphi\sin\psi, \beta + r\cos\varphi\cos\psi, \gamma + r\sin\varphi) \end{array}$$

è detta *sfera* di raggio $r$ e centro $(\alpha, \beta, \gamma)$.
Osserviamo che i parametri $\varphi$ e $\psi$ sono rispettivamente la latitudine e la

longitudine. Quindi per ogni fissato valore del parametro $\varphi$ si ottiene un parallelo, mentre per ogni fissato valore del parametro $\psi$ si ottiene un meridiano. I punti ottenuti ponendo $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sono detti poli della sfera.

Data una superficie $\mathcal{S}$ di parametrizzazione $x_1(s,t), \ldots, x_n(s,t)$ su $I \times I'$, tale che esistano le derivate parziali di $x_1, \ldots, x_n$ consideriamo la matrice

$$J(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial s} & \dfrac{\partial x_n(s,t)}{\partial t} \end{pmatrix};$$

questa è detta *matrice jacobiana* relativa alla data parametrizzazione di $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ si dice *regolare* in $(u_0, v_0) \in I \times I'$ se la matrice jacobiana calcolata in $(u_0, v_0)$ ha rango massimo (cioè 2), altrimenti il punto è detto *singolare*.
Una superficie parametrizzata $\mathcal{S}$ si dice *regolare* se non ha punti singolari, si dice *singolare* altrimenti.

**Esempi.**
Consideriamo un generico cono di vertice $V \equiv (a,b,c)$ e direttrice $\mathcal{D}$

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto & (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \end{array}$$

tale che le funzioni $x_i$ siano derivabili e verifichiamo che il vertice è un punto singolare. Dalle equazioni parametriche (si veda pagina 100 ) si trova che la matrice jacobiana è

$$J(s,t) = \begin{pmatrix} x_1(t) - a & x_1'(t)s \\ x_2(t) - b & x_2'(t)s \\ x_3(t) - c & x_3'(t)s \end{pmatrix},$$

che calcolata in $(t, 0)$ ha una colonna di zeri e quindi ha rango al più 1.

Consideriamo ora la sfera parametrizzata dalle equazioni di pagina 100 e verifichiamo che i poli sono punti singolari. Infatti la matrice jacobiana relativa a tale parametrizzazione è:

$$J(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -r \sin\varphi \sin\psi & r \cos\varphi \cos\psi \\ -r \sin\varphi \cos\psi & -r \cos\varphi \sin\psi \\ r \cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

che calcolata nei poli ha la seconda colonna di zeri.

OSSERVAZIONE – L'essere sigolare o meno può essere, come nel caso dell'esempio precedente, una qualità di un punto della superficie parametrizzata e non del corrispondente supporto. Infatti lo stesso insieme di punti (la sfera) può essere parametrizzato in modo diverso, con punti sigolari diversi da questi.

**Esempio.**
Consideriamo il cilindro di vettore libero $(0,0,1)$ e direttrice l'ellisse di equazioni parametriche

$$\varphi \longmapsto (3\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0) \qquad\qquad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Le equazioni parametriche del cilindro sono

$$\begin{cases} x = 3\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \\ z = s \end{cases},$$

quindi la sua matrice jacobiana è:

$$J(\varphi, s) = \begin{pmatrix} 3\sin\varphi & 0 \\ 2\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente che per ogni valore di $(\varphi, s)$ la matrice jacobiana ha rango due. Tale cilindro è quindi una superficie regolare.

OSSERVAZIONE – Anche le superfici possono sovente essere espresse in forma cartesiana, che si può ottenere per eliminazione dei parametri.

**Esempi.**
Cerchiamo una forma cartesiana per il supporto della sfera. Ricordiamo che una sua parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos\varphi\sin\psi \\ y = \beta + r\cos\varphi\cos\psi \\ z = \gamma + r\sin\varphi \end{cases},$$

con $(\alpha, \beta, \gamma)$ come centro e $r$ come raggio.
Si ha

$$
\begin{aligned}
(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 &= (\alpha+r\cos\varphi\sin\psi-\alpha)^2+(\beta+r\cos\varphi\cos\psi-\beta)^2 \\
&\quad +(\gamma+r\sin\varphi-\gamma)^2 \\
&= r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi+r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+r^2\sin^2\varphi \\
&= r^2\cos^2\varphi(\sin^2\psi+\cos^2\psi)+r^2\sin^2\varphi \\
&= r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi) \\
&= r^2,
\end{aligned}
$$

quindi una equazione cartesiana per la sfera di centro $(\alpha, \beta, \gamma)$ e raggio $r$ è (come forse sospettavate!)

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2.$$

Il cono $\mathcal{C}$ di pagina 100 può essere rappresentato dall'equazione cartesiana:

$$x^2+y^2-9(z+1)^2=0,$$

che si ottiene eliminando i parametri.

Il cilindro di pagina 102 ha come equazione cartesiana:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=1.$$

# Indice analitico